RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE (A1)

Skrypt dla studentów

Andrzej Raczyński

Wrocław 2010

Spis treści

Wstęp

Skrypt ten oparty jest na prowadzonym przeze mnie semestralnym kursie *Równania różniczkowe A1*. Zawarty materiał obejmuje zwyczajowo wykładane podstawy równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych.
Każdy rozdział kończy się przykładowymi zadaniami, pojawiającymi się zwykle na listach zadań w trakcie wykładu, w dużej mierze autorstwa Grzegorza Karcha.
Skrypt ten został zrealizowany w ramach projektu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego *"Zamawianie kształcenia na kierunkach technicznych, matematycznych i przyrodniczych - pilotaż"*.

Rozdział 1

Preliminaria

Najbardziej ogólną postacią równania różniczkowego jest następująca postać

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0, \tag{1.1}$$

gdzie F jest pewną funkcją $n+2$ zmiennych. Krótko mówiąc przez równanie różniczkowe rozumieć związek pomiędzy zmienną niezależną (w równaniu (1.1) jest to t), niewiadomą funkcją tejże zmiennej ($y(t)$) i jej kolejnymi pochodnymi, przy czym nie wszystkie wspomniane składniki muszą wystąpić w równaniu. Przez rozwiązanie równania różniczkowego rozumiemy zwykle każdą funkcję $y(t)$ (posiadającą pochodne aż do $n-$tego stopnia) spełniającą równanie (1.1).

Przez **rząd równania** rozumieć będziemy najwyższy występujący stopień pochodnej.

Przez **zagadnienie Cauchy'ego** (inaczej **zagadnienie początkowe**) rozumieć będziemy równanie różniczkowe uzupełnione o warunek początkowy. Dla równania I-go rzędu typowe zagadnienie początkowe ma postać:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem ogólnym nazywać będziemy rozwiązanie równania (a nie zagadnienia !) zależne od stałej (chcąc otrzymać rozwiązanie zagadnienia stałą tą wylicza się korzystając z warunku początkowego).

Rozwiązując równania (zagadnienia) różniczkowe będziemy starali się odpowiedzieć na trzy podstawowe pytania. Są to pytania o:

- **istnienie** rozwiązań. Nie wszystkie bowiem zagadnienia mają rozwiązanie.

- **jednoznaczność** rozwiązań. Jak się przekonamy, istnieją zagadnienia mające więcej niż jedno rozwiązanie. Przykładem jest równanie

$$y' = \sqrt{2y} \qquad \text{uzupełnione warunkiem początkowym} \qquad y(0) = 0.$$

Łatwo znaleźć dwa rozwiązania

$$y_0(t) = 0 \quad \text{i} \quad y_1(t) = \frac{t^2}{2}$$

(w istocie zagadnienie to ma ich nieskończenie wiele).

- **globalność** rozwiązań. Wiedząc, że dane równanie ma rozwiązanie możemy postawić pytanie o to, dla jakich wartości t rozwiązanie to istnieje. Na przykład równanie

$$y' = 1 + y^2 \qquad \text{uzupełnione warunkiem początkowym} \qquad y(0) = 0$$

ma (jedyne) rozwiązanie $y(t) = \operatorname{tg} t$, które oczywiście nie jest rozwiązaniem globalnym.

Oczywiście powyższe pytania można uzupełniać innymi (o np. asymptotykę rozwiązań itp.).

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego:
a) $x(t) = \operatorname{tg} t, \quad x' = 1 + x^2,$ b) $x(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad tx' + x = \cos t.$

Rozdział 2

Równania pierwszego rzędu

2.1 Równania o rozdzielonych zmiennych

Równaniem różniczkowym o rozdzielonych zmiennych nazywamy równanie postaci

$$y'(t) = f(t)g(y),$$

gdzie prawa strona równania jest iloczynem dwóch funkcji: jedna zależy tylko od zmiennej niezależnej t, druga zaś zależy tylko od szukanej funkcji y $(= y(t))$ (warto pamiętać, że funkcja stała może być również traktowana jako funkcja zależna od t lub/i od y). Kwestię istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania o rozdzielonych zmiennych rozstrzyga następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.1.1 *Niech funkcje f i g będą funkcjami ciągłymi - f w otoczeniu punktu t_0, a g w otoczeniu punktu y_0. Niech $g(y_0) \neq 0$. Wtedy istnieje otoczenie punktu t_0 na którym istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia*

$$\begin{cases} y' = f(t)g(y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

spełniające równość

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(s)}\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds. \tag{2.2}$$

Zanim przystąpimy do dowodzenia twierdzenia, zauważmy że oprócz rozwiązania spełniającego warunek (2.2) mogą istnieć również inne rozwiązania, niespełniające założeń twierdzenia.
Przed zastosowaniem Twierdzenia 2.1.1 warto sprawdzić istnienie innych rozwiązań będącymi funkcjami stałymi tzn. takich, że $y(t) \equiv a$ gdzie a jest rozwiązaniem równania $g(a) = 0$. Możemy bowiem łatwo udowodnić następujący lemat:

Lemat. *Niech w zagadnieniu (2.1) y_0 spełnia rownanie $g(y_0) = 0$, wtedy funkcja $g(t) \equiv y_0$ jest rozwiązaniem tego zagadnienia.*

Dowód. (Twierdzenia 2.1.1) Ponieważ w otoczeniu punktu t_0 funkcja $g(y) \neq 0$ podzielmy obustronnie przez $g(y(t))$ i odcałkujmy po odcinku (t_0, t) otrzymując równość

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{g(y(s))} y'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds.$$

Dokonując zamiany zmiennych $z = y(s)$, $dz = y'(s)\, ds$ powyższe równanie sprowadza się do

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{g(z)}\, dz = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds.$$

Podstawiając zatem zgodnie z warunkiem początkowym y_0 zamiast $y(t_0)$, dochodzimy do wzoru (2.2).
Jednoznaczność tak otrzymanego rozwiązania wynika z faktu, że całki oznaczone określone są w sposób jednoznaczny.

❏

Uwaga.
Jak widać jedynym problemem przy rozwiązywaniu równania o rozdzielonych zmiennych jest umiejętność obliczenia całek z funkcji $f(s)$ i $\frac{1}{g(s)}$. Jeśli potrafimy to zrobić, to – przy oznaczeniach $F'(t) = f(t), G'(t) = \frac{1}{g(t)}$ – równanie $\frac{y'}{g} = f$ daje się zapisać jako $[G(y)]' = F'(t)$, gdzie $'$ oznacza różniczkowanie po zmiennej t, zatem funkcje $G(y)$ i $F(t)$ różnią się tylko o stałą. Tak więc $G(y) = F(t) + C$, gdzie $C = G(y_0) - F(t_0)$. Rozwiązanie dane jest zatem wzorem

$$y(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(y_0)).$$

Przykład 1.
Rozwiążmy jedno z najprostszych równań różniczkowych

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t), \qquad (y' = y).$$

Jak łatwo sprawdzić jest to równanie o rozdzielonych zmiennych, bowiem $g(y) = y$ a $f(t) = 1$. Zgodnie z lematem znajdujemy najpierw rozwiązanie nie spełniające założeń twierdzenia 2.1.1. Jest nim oczywiście $y(t) \equiv 0$.
Znajdźmy teraz pozostałe rozwiązania (przy założeniu $y_0 \neq 0$). Postępując analogicznie jak w dowodzie twierdzenia (albo przepisując wzór (2.2)) otrzymujemy równanie

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{s}\, ds = \int_{t_0}^{t} 1\, ds.$$

Co po odcałkowaniu daje

$$\ln|s| \,\Big|_{y_0}^{y(t)} = s \,\Big|_{t_0}^{t} \Longleftrightarrow \left|\frac{y(t)}{y_0}\right| = e^{t-t_0} \Longleftrightarrow y(t) = \pm y_0 e^{t-t_0}$$

a ostatnia równość wynika z definicji wartości bezwzględnej. Ponieważ chcemy by $y(t_0) = y_0$ więc rozwiązanie dane jest wzorem

$$y(t) = y_0 e^{t-t_0}.$$

Przy okazji zauważmy, że znalezione wcześniej rozwiązanie $y(t) = 0$ również da się zapisać w ten sposób.

❏

Przykład 2.
Znajdziemy rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} e^{-t}y' - te^{-y} = 0, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Zapisując powyższe równanie w postaci

$$y' = te^t e^{-y}$$

łatwo stwierdzić, że jest to równanie o rozdzielonych zmiennych. Postępując podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2.1.1 otrzymujemy

$$\left(\int_0^t e^{y(s)} y'(s)\, ds =\right) \int_{-1}^{y(t)} e^z\, dz = \int_0^t se^s\, ds$$

(w pierwszej całce dokonaliśmy zamiany zmiennych $z = y(s)$). Obliczając całki otrzymujemy

$$e^{y(t)} - e^{-1} = e^t(t-1) + 1,$$

co daje rozwiązanie postaci:

$$y(t) = \ln(e^t(t-1) + 1 + e^{-1}).$$

❏

Uwaga. *(tzw. "metoda inżynierska")*
Istnieje popularny sposób rozwiązywania (a właściwie zapisywania rozwiązywania) równań o rozdzielonych zmiennych. Polega ono na rozdzieleniu różniczek dt i dy i zapisaniu równania w postaci:

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(t)\,dt$$

a następnie dopisaniu obustronnie odpowiednich całek (by uniknąć nieporozumienia zamienimy zmienne pod całkami y na z i t na s)

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{g(z)}\,dz = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds.$$

Jak nietrudno zauważyć powyższe równanie jest równoważne równości (2.2).

❏

Przykładowe zadania

Zadanie 2. Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych i naszkicować ich wykresy dla różnych stałych C:
a) $y' = e^{x+y}$, b) $y' = \sqrt{x}/y$, c) $y' = \sqrt{y/x}$.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązania następujących równań spełniających podany warunek początkowy:
a) $y' = 2,\ y(0) = 2$, b) $y' = y/x,\ y(1) = 5$, c) $y' = -y^2 e^x,\ y(0) = 1/2$.

Zadanie 4. Rozwiąż równania nie rozdzielając różniczek dy i dt (czyli całkując metodą "klasyczną"):
a) $y' = (1+t)(1+y)$, *b*) $y' = e^{t+y+3}$.

Zadanie 5. Rozwiąż zagadnienia początkowe nie rozdzielając różniczek dy i dt:
a) $xyy' = \ln x,\ \ y(1) = 1$, *b*) $y' = -y^2 e^x;\ \ y(0) = 1/2$.

2.2 Równania liniowe pierwszego rzędu

Równaniem różniczkowym rzędu I-szego nazywamy równanie postaci

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t). \tag{2.3}$$

W wypadku gdy funkcja $q(t) \equiv 0$ równanie nazywamy równaniem **jednorodnym**.

Uwaga.
Zauważmy, że równanie liniowe jednorodne jest również równaniem o rozdzielonych zmiennych (co łatwo zauważyć zapisując je w postaci $y' = -p(t)y$). Tak więc potrafimy już rozwiązywać równania liniowe. My jednak poznamy nową metodę całkowania (tzn. rozwiązywania) tego równania.

Przemnóżmy równanie (2.3) przez funkcję (zwaną **czynnikiem całkującym**) postaci

$$e^{P(t)},$$

gdzie $P(t)$ jest funkcją pierwotną dla funkcji $p(t)$, tzn. $P'(t) = p(t)$. Otrzymamy równanie

$$y'(t)e^{P(t)} + y(t)p(t)e^{P(t)} = 0.$$

Po pomnożeniu przez czynnik całkujący lewa strona powyższego równania daje się zapisać jako pochodną iloczynu szukanej funkcji $y(t)$ i czynnika całkującego. Mamy zatem

$$\left(y(t)e^{P(t)}\right)' = 0,$$

co implikuje

$$y(t)e^{P(t)} = const.$$

Tak więc rozwiązanie ma postać

$$y(t) = Ce^{-P(t)}, \tag{2.4}$$

gdzie C jest dowolną stałą. Zauważmy, że choć wybór funkcji pierwotnej $P(t)$ może być dokonany z dokładnością do stałej, to nie zmienia to postaci rozwiązania (2.4), gdyż $const\, e^{-P(t)+C_1} = const\, e^{-P(t)}$.

Przykład 3.
Rozwiążmy zagadnienie
$$\begin{cases} y' + y\cos t = 0, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$
Czynnik całkujący jest postaci $e^{\int cost} = e^{\sin t}$, zatem po przemnożeniu równania przez ten czynnik otrzymujemy $\left(y(t)e^{\sin t}\right)' = 0$. Tak więc
$$y(t) = Ce^{-\sin t}, \qquad \text{gdzie } C \text{ jest dowolną stałą.}$$
Uwzględniając warunek początkowy mamy równość
$$5 = y(0) = Ce^{-\sin 0} = Ce^0 = C.$$
Rozwiązanie zagadnienia ma postać
$$y(t) = 5e^{-\sin t}.$$
❏

Chcąc rozwiązać **równania niejednorodne** ($q(t) \not\equiv 0$) posłużymy się tą samą metodą co w przypadku równań jednorodnych. Istotnie, mnożąc równanie (2.3) przez czynnik całkujący (tej samej postaci co w przypadku jednorodnym) otrzymujemy
$$y'(t)e^{P(t)} + y(t)p(t)e^{P(t)} = q(t)e^{P(t)},$$
$$\left(y(t)e^{P(t)}\right)' = q(t)e^{P(t)}. \tag{2.5}$$
Ponieważ prawa strona powyższej równości nie zawiera szukanej funkcji, zatem odcałkowując obie strony równości po odcinku (t_0, t) dostajemy wzór na rozwiązanie równania liniowego niejednorodnego
$$y(t) = e^{-P(t)}\left(\int_{t_0}^{t} q(s)e^{P(s)}\,ds + y_0e^{P(t_0)}\right).$$
lub zapisane za pomocą całek nieoznaczonych
$$y(t) = e^{-P(t)}\int q(s)e^{P(s)}\,ds.$$
Stała która powinna pojawić się w rozwiązaniu ogólnym ukryta jest w całce nieoznaczonej $\int q(t)e^{P(t)}$.
Jak łatwo zauważyć, rozwiązanie (w obu postaciach) nie zależy od wyboru funkcji pierwotnej $P(t)$.

Powyższa metoda jest w istocie dowodem twierdzenia

Twierdzenie 2.2.1 *Niech funkcje $p(t)$ i $q(t)$ będą funkcjami ciągłymi na odcinku (a, b), $a \leqslant t_0 \leqslant b$. Wtedy zagadnienie*

$$\begin{cases} y'(t) + p(t)y(t) = q(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie na tym odcinku.

Przykład 4.
Znajdziemy rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} y' - \frac{2}{t}y = t^5, \\ y(1) = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Czynnik całkujący jest postaci $e^{\int -\frac{2}{t}} = e^{\ln t^{-2}} = \frac{1}{t^2}$. Mnożąc równanie obustronnie przez ten czynnik otrzymujemy równość

$$\left(y(t)\frac{1}{t^2}\right)' = t^3.$$

Odcałkowując otrzymujemy rozwiązanie postaci

$$y(t) = t^2\left(\frac{t^4}{4} + C\right) = Ct^2 + \frac{t^6}{4}. \tag{2.6}$$

Podstawiając otrzymane rozwiązanie do warunku początkowego mamy

$$\frac{9}{4} = y(1) = C + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Zatem rozwiązanie zagadnienia ma postać

$$y(t) = 2t^2 + \frac{t^6}{4}.$$

❏

Uwaga.
Przyglądając się postaci rozwiązania (2.6) można zauważyć, że składa się ono z dwóch części: rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (w powyższym

przykładzie jest to Ct^2) i pewnego szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego (które nie musi spełniać warunku początkowego - w przykładzie $\frac{t^6}{4}$). Powyższa obserwacja prawdziwa jest nie tylko w tym szczególnym przykładzie ale zachodzi również dla wszystkich rozwiązań równań liniowych.
Istotnie, jeśli na przestrzeni funkcji różniczkowalnych C^1 zdefiniujemy operator A działający na przestrzeń funkcji ciągłych, w następujący sposób:

$$A(f) = f' + p(t)f, \tag{2.7}$$

to rozwiązanie ogólne równania

$$A(y) = q(t) \qquad (\text{czyli } \; y' + p(t)y = q(t))$$

składa się z sumy dwóch składników: funkcji należących do jądra operatora A i dowolnego rozwiązania szczególnego tego równania.
Operator A jest operatorem liniowym - skąd nazwa równań - (tzn. $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$), a jądro tego operatora ($\ker A$) jest przestrzenią jednowymiarową i składa się ze wszystkich rozwiązań równania liniowego jednorodnego $y' + p(t)y = 0$ (tzn. funkcji postaci $Ce^{P(t)}$). Tłumaczy to więc postać rozwiązania (2.6).

Przykładowe zadania

Zadanie 6. Znajdź całkę ogólną (tzn. rozwiązanie ogólne) równań liniowych mnożąc je przez odpowiedni czynnik całkujący:
a) $x' + x\cos t = 0$, *b)* $x' + t^2x = t^2$, *c)* $x' + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}$, *d)* $x' + x = te^t$.

Zadanie 7. Rozwiąż następujące zagadnienia początkowe bez znajdowania rozwiązania ogólnego: *a)* $y' + \sqrt{1+t^2}y = 0$, $y(0) = \sqrt{5}$; *b)* $y' + ty = 1 + t$, $y(3/2) = 0$.

Zadanie 8. Udowodnij, że dla równania $x' + a(t)x = f(t)$, gdzie a i f są funkcjami ciągłymi, $a(t) \geqslant c > 0$, oraz $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, zachodzi relacja $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

2.3 Równania zupełne

Równaniem różniczkowym zupełnym nazywamy równanie postaci

$$M(t,y) + N(t,y)y' = 0 \qquad (M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0) \qquad (2.8)$$

spełniający warunek

$$\frac{\partial}{\partial y}M(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}N(t,y).$$

UWAGA.
Równanie zupełne jest również niekiedy zapisywane jako

$$M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0 \quad \text{lub} \quad M(t,y)\frac{dt}{dy} + N(t,y) = 0.$$

Idea szukania rozwiązania równania zupełnego opiera się na prostej obserwacji. Załóżmy, że dana jest funkcja

$$\varphi(t,y).$$

Ponieważ

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t,y)) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,y) + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(t,y)y'(t),$$

zatem jeśli w równaniu (2.8) $M(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,y)$ a $N(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(t,y)$, to całka pierwsza równania (2.8) dana jest wzorem

$$\varphi(t,y) = const.$$

Definicja.
Funkcję φ z powyższego równania nazywamy **różniczką zupełną** *równania* (2.8).

Twierdzenie 2.3.1 *Niech funkcje $M(t,y)$ i $N(t,y)$ będą funkcjami ciągłymi i niech mają ciągłe pochodne cząstkowe względem t oraz y w prostokącie $R = \{a < t < b, c < y < d\}$. Następujące dwa warunki są równoważne:*

i) $\frac{\partial}{\partial y}M(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}N(t,y)$,

ii) istnieje funkcja $\varphi(t,y)$ taka, że
$M(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,y)$ *oraz* $N(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(t,y)$.

Dowód.
i) $\Rightarrow$ *ii)* Zakładając, że spełniony jest warunek *i)* (tzn. równanie jest równaniem zupełnym) wykażemy istnienie funkcji φ o żądanych własnościach. Zdefinujmy funkcję φ

$$\varphi(t,y) = \int M(t,y)\,dt + \int \left(N(t,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\,dt \right) dy.$$

sprawdźmy, czy tak zdefiniowana funkcja spełnia warunek *ii)*. Istotnie, mamy:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,y) = M(t,y) + \int \left(\frac{\partial}{\partial t}N(t,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(t,y) \right) dy = M(t,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi(t,y) = \int \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\,dt + N(t,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\,dt = N(t,y).$$

ii) $\Rightarrow$ *i)* Najprostszy dowód polega na zróżniczkowaniu $M(t,y)$ względem y a funkcji $N(t,y)$ względem t. Otrzymujemy w ten sposób

$$\frac{\partial}{\partial y}M(t,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial t}\varphi(t,y), \qquad \frac{\partial}{\partial t}N(t,y) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial y}\varphi(t,y)$$

a równość pomiędzy powyższymi wyrażeniami zachodzi jeśli funkcja φ jest odpowiedniej klasy.W rozumowaniu tym kryje się jednak pewien problem - nie mamy pewności, że funkcja φ jest odpowiedniej klasy. Dowód omijający tę trudność wygląda następująco.
Całkując $M(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,y)$ względem zmiennej t otrzymujemy:

$$\varphi(t,y) = \int M(t,y)\,dt + h(y).$$

Różniczkując tak otrzymaną równość otrzymujemy

$$(N(t,y) =)\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi(t,y) = \int \frac{\partial}{\partial y}M(t,y)\,dt + h'(y)$$

z czego wynika, że

$$h'(y) = N(t,y) - \int \frac{\partial}{\partial y}M(t,y)\,dt.$$

Ponieważ funkcja h nie zależy od t zatem zróżniczkowanie $h'(y)$ względem t daje

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}N(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(t,y),$$

co implikuje spełnianie warunku i).

❏

Przykład 5.
Rozpatrzmy równanie

$$2ty^3 + \cos t + (3(ty)^2 + e^y)y' = 0.$$

Sprawdźmy, czy jest to równanie zupełne:

$$M(t, y) = 2ty^3 + \cos t, \quad N(t, y) = 3(ty)^2 + e^y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M(t, y) = 6ty^2, \qquad \frac{\partial}{\partial t} N(t, y) = 6ty^2.$$

Z twierdzenia 2.3.1 (ponieważ warunek *i)* jest spełniony) otrzymujemy istnienie funkcji φ spełniającej warunek *ii)*. Obliczmy ją:

$$\varphi(t, y) = \int M(t, y)\, dt = t^2y^3 + \sin t + h(y)$$

gdzie funkcja h zależy tylko od y (pełni rolę stałej przy całowaniu względem t). Podstawiając tak otrzymaną funkcję φ do równości $N(t, y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(t, y)$ mamy

$$3(ty)^2 + e^y = 3t^2y^2 + h'(y) \quad \Rightarrow \quad h'(y) = e^y \quad \Rightarrow \quad h(y) = e^y + C.$$

Tak więc rozwiązanie (całka pierwsza) dane jest wzorem

$$\varphi(t, y) = \int M(t, y)\, dt = t^2y^3 + \sin t + e^y + C.$$

❏

2.3.1 Równania dające się uzupełnić do równań zupełnych

W tym podrozdziale zajmiemy się równaniami które co prawda nie są równaniami zupełnymi ale dają się "uzupełnić" do równań zupełnych.

Definicja.
Funkcję $\mu(t, y)$ *nazywamy* **czynnikiem całkującym** *równania*

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0$$

jeśli równanie

$$\mu M(t, y) + N(t, y)\mu\frac{dy}{dt} = 0$$

jest równaniem zupełnym.

PRZYKŁAD 6.
Rozważmy równanie liniowe niejednorodne

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t) \quad \Longleftrightarrow (p(t)y(t) - q(t))\ dt + \ dy = 0.$$

Przyjmując standardowe oznaczenia M i N mamy

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(p(t)y - q(t)) = p(t), \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}1 = 0,$$

zatem równanie liniowe **nie** jest równaniem zupełnym (poza mało interesującym przypadkiem $p(t) \equiv 0$).
Przypomnijmy sobie jednak, że przy rozwiązywaniu równania liniowego w pierwszym kroku mnożyliśmy je przez funkcję $e^{\int p(t)}$ (nie darmo zwanego wcześniej czynnikiem całkującym). Sprawdźmy czy tak przemnożone równanie jest już równaniem zupełnym. Istotnie, mamy

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(p(t)y - q(t))e^{\int p(t)} = p(t)e^{\int p(t)}, \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}e^{\int p(t)} = p(t)e^{\int p(t)},$$

tak więc, tak przemnożone równanie liniowe jest już równaniem zupełnym.

❑

Jak znaleźć czynnik całkujący? Zauważmy, że jeśli μ jest czynnikiem całkującym to spełnia ono rownanie

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)(t, y) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N)(t, y) \Longleftrightarrow$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial y}M(t,y) + M(t,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu = \mu\frac{\partial}{\partial t}N(t,y) + N(t,y)\frac{\partial}{\partial t}\mu, \tag{2.9}$$

co nie wygląda wiele prościej od problemu znalezienia pierwotnego rozwiązania. Aby uprościć nasz problem zawęzimy nasze poszukiwania do funkcji μ zależnej tylko od zmiennej t. Dla takiej funkcji równanie (2.9) przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = \mu(t)\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}. \tag{2.10}$$

Jeśli wyrażenie $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}/N$ zależy tylko od y to równanie (2.10) jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. Rozwiązując je, otrzymujemy rozwiązanie $\mu(t)$ - możemy więc zatem sformułować następujące kryterium

Kryterium 1. *Jeśli wyrażenie*

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \ (= \phi(t))$$

jest funkcją zależną tylko od t to równanie (2.8) *ma czynnik całkujący postaci* $e^{\int \phi(t)}$.

Przykład 7.(*równanie liniowe*)
Przekonamy się teraz że znany nam już czynnik całkujący dla równania liniowego jest w istocie prostym przykładem zastosowania powyższego kryterium.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{p(t) - 0}{1} = p(t).$$

Zatem czynnik całkujący jest postaci $e^{\int p(t)}$ (czego się spodziewaliśmy).

❏

Przykład 8.
Rozważmy równanie

$$(1 - t^2 y)dt + t^2(y - t)dy = 0.$$

Jak łatwo się przekonać nie jest to równanie zupełne ($-t^2 \neq 2ty - 3t^2$). Aby znaleźć czynnik całkujący zastosujemy kryterium. Obliczmy wyrażenie

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{-t^2 - 2ty + 3t^2}{t^2(y - t)} = \frac{-2t(y - t)}{t^2(y - t)} = -\frac{2}{t}.$$

Ponieważ $-\frac{2}{t}$ zależy tylko od zmiennej t zatem (zgodnie z kryterium) czynnik całkujący jest postaci

$$e^{\int -\frac{2}{t}} = e^{\ln t^{-2}} = \frac{1}{t^2}.$$

Mnożąc równanie przez ten czynnik otrzymujemy równanie

$$\left(\frac{1}{t^2} - y\right) dt + (y - t)\, dy = 0,$$

które jest już równaniem zupełnym.
Zgodnie z twierdzeniem 2.3.1 istnieje funkcja $\varphi(t, y)$ taka, że

$$\varphi(t,y) = \int \left(\frac{1}{t^2} - y\right) dt = -\frac{1}{t} - ty + h(y), \quad \text{oraz } y - t = -t + h'(y) \Rightarrow h(y) = \frac{1}{2}y^2.$$

Tak więc całka pierwsza ma postać

$$-\frac{1}{t} - ty + \frac{1}{2}y^2 = C,$$

co daje rozwiązanie postaci

$$y(t) = t \pm \sqrt{t^2 + \frac{2}{t} + C}$$

gdzie znak $\pm$ (jak i wartość stałej C) wybieramy zależnie od warunku początkowego. ❏

Zakładając, że czynnik całkujący μ jest funkcją zależną tylko od y i przeprowadzając rozumowanie podobne do przedstawionego powyżej możemy otrzymać następujące kryterium

Kryterium 2. *Jeśli wyrażenie*

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \; (= \psi(y))$$

jest funkcją zależną tylko od y to równanie (2.8) *ma czynnik całkujący postaci* $e^{\int \psi(y)}$.

UWAGA.
Równanie różniczkowe które daje uzupełnić się do równania zupełnego może mieć kilka czynników całkujących.

Inne kryteria pomocne przy znajdowaniu czynnika całkującego można znaleźć w książce [5, Rozdział 1.12]

Przykładowe zadania

Zadanie 9. Rozwiązać równania w postaci różniczek zupełnych:
a) $2tx\,dt + (t^2 - x^2)\,dx = 0$, *b)* $e^{-x}\,dt - (2x + te^{-x})\,dx = 0$.

Zadanie 10. W podanych równaniach dobierz stałą a tak, aby było ono zupełne, a następnie rozwiąż je: *a)* $t+ye^{2ty}+ate^{2ty}y' = 0$, *b)* $\frac{1}{t^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{(at+1)}{y^3}y' = 0$.

Zadanie 11. Uzasadnij, że równanie o zmiennych rozdzielonych $M(t)+N(y)(dy/dt) = 0$ jest zupełne.

Zadanie 12. Uzasadnij, że jeżeli $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$, to wyrażenie $M(t,y) - \int(\partial N(t,y)/\partial t)dy$ nie zależy od od y (tzn. zależy tylko od t).

Zadanie 13. Znajdź wszystkie funkcje $f(t)$, dla których równanie $y^2 \sin t + yf(t)(dy/dt) = 0$ jest zupełne. Rozwiąż równanie dla tych f.

Zadanie 14. Znaleźć współczynnik $f = f(t)$ w równaniu $f(t)x' + t^2 + x = 0$, jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $u(t) = t$.

Zadanie 15. Sprawdź, że podana funkcja $\mu(x,t)$ jest czynnikiem całkującym danego równania. Rozwiąż równanie.
a) $6xy\,dx + (4y + 9x^2)\,dy = 0$, $\mu(x,t) = y^2$
b) $-y^2\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0$, $\mu(x,y) = 1/(x^2y)$
c) $y(x + y + 1)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$, $\mu(x,y) = e^x$

Zadanie 16. Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnij, że $\mu_1(x,y) = 1/(xy)$, $\mu_2(x,y) = 1/y^2$, $\mu_3(x,y) = 1/(x^2 + y^2)$ są czynnikami całkującymi równania $y\,dx - x\,dy = 0$. Uzasadnij, że otrzymane przy pomocy tych czynników całkujących rozwiąznia są równoważne.

Zadanie 17. Scałkować równania metodą czynnika całkującego:
a) $\left(\frac{x}{y} + 1\right) dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right) dy = 0$, *b)* $(x^2 + y)dx - xdy = 0$,
c) $(y + x^2)dy + (x - xy)dx = 0$.

2.4 Inne typy równań I-go rzędu

W rozdziale tym zajmiemy się równaniami, które - po zastosowaniu odpowiednich podstawień - dają się przekształcić do już poznanych typów równań. Pierwszym z nich jest

2.4.1 Równanie Bernouliego

Równaniem Bernoulliego nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y(t) = q(t)y^m(t), \quad m \neq 0, 1 \tag{2.11}$$

Uwaga.
Dla $m = 0$ równanie Bernoulliego jest równaniem liniowym niejednorodnym a dla $m = 1$ liniowym jednorodnym.

Rozwiązania równania Bernoulliego znajdujemy mnożąc równanie to przez $(1-m)y^{-m}$. Otrzymujemy wtedy równanie

$$(1-m)\frac{y'}{y^m} + (1-m)p(t)y^{1-m}(t) = (1-m)q(t).$$

Dokonując podstawienia $z(t) = y^{1-m}(t)$ $(z' = (1-m)y^{-m}y')$ otrzymujemy równanie

$$z'(t) + (1-m)z(t) = (1-m)q(t),$$

będące równaniem liniowym niejednorodnym (które potrafimy już rozwiązać).

Przykład 9.
Rozpatrzmy równanie

$$y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = t^3y^2.$$

Dzieląc obie strony przez y^2 i podstawiając $z = -y^{-1}$ otrzymujemy równanie

$$z'(t) - \frac{1}{t}z(t) = t^3,$$

będące już równaniem liniowym niejednorodnym. Dla tego równania czynnik całkujący jest postaci $e^{\int -\frac{1}{t}} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$. Mamy zatem

$$\left(z(t)\frac{1}{t}\right)' = t^2 \Longrightarrow z(t) = t\left(\frac{t^3}{3} + C\right).$$

Wracając do funkcji $y(t) = \frac{1}{z(t)}$ otrzymujemy rozwiązanie postaci

$$y(t) = \frac{1}{\frac{t^4}{3} + Ct}$$

a że $3C$ jest również stałą więc możemy rozwiązanie zapisać jako

$$y(t) = \frac{3}{t^4 + Ct}.$$

❑

Następnym typem równania dającym się sprowadzić do - właśnie poznanego - równania Bernoulliego jest

2.4.2 Równanie Riccatiego

Równaniem Riccatiego nazywać będziemy równanie postaci

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y(t) + q(t)y^2(t) = f(t). \tag{2.12}$$

W przypadku tego równanie nie istnieje, niestety, metoda pozwalająca uzyskać rozwiązanie. Nie pozostajemy jednak bezsilni, gdyż mając daną funkcję $\psi(t)$ - dowolne rozwiązanie równania Riccatiego możemy znaleźć rozwiązanie ogólne tego równania (osobnym problemem pozostaje znalezienie wspomnianego dowolnego rozwiązania - najczęściej zgaduje się je).
Istotnie, jeśli rozwiązanie $y(t)$ przedstawimy w postaci sumy $x(t) + \psi(t)$, to równanie (2.12) przyjmie postać

$$x'(t)+x(t)(p(t)+2q(t)\psi(t))+q(t)x^2(t) = -(\psi'(t)+p(t)\psi(t)+q(t)\psi^2(t)-f(t)).$$

Ponieważ prawa strona powyższego równania jest równa zero, zatem, by wyliczyć $x(t)$ wystarczy rozwiązać równanie Bernoulliego $x'(t)+x(t)(p(t)+2q(t)\psi(t))+q(t)x^2(t) = 0$.

Więcej informacji o równaniu Riccatiego, sposobach rozwiązywania tego równania oraz innych równaniach dających się sprowadzić do równania Bernoulliego można znaleźć w książce [5].

Kolejnym typem równań który daje się sprowadzić do znanych nam już typów równań są

2.4.3 Równania jednorodne

Równaniem jednorodnym nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right) \tag{2.13}$$

gdzie prawa strona równania jest funkcją ilorazu $\frac{y}{t}$.

Znalezienie rozwiązania równania jednorodnego sprowadza się do dokonania podstawienia $z(t) = \frac{y(t)}{t}$. Ponieważ $y = zt$ więc $y'(t) = z'(t)t+z(t)$. Podstawiając nowe zmienne otrzymujemy równanie

$$z'(t)t + z(t) = f(z) \quad \Longleftrightarrow z'(t) = \frac{f(z) - z}{t}$$

będące równaniem o rozdzielonych zmiennych. Rozwiązanie powyższego równania sprowadza się do umiejętności policzenia całki

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln t + C.$$

Zauważmy, że powyższe rozumowanie jest prawdziwe o ile $f(z) \neq z$. Sytuacja, gdy $f(z) = z$ zachodzi jednak tylko w przypadku, łatwego do rozwiązania, równania o rozdzielonych zmiennych $y' = \frac{y}{t}$.

Przykład 10.
Rozważmy równanie

$$t^2y' - y^2 - yt = 0.$$

Doprowadzając powyższe równanie do postaci

$$y'(t) = \frac{y^2 + yt}{t^2} = (\frac{y}{t})^2 + \frac{y}{t}$$

i podstawiając $z = \frac{y}{t}$ otrzymujemy równanie

$$z' = \frac{z^2}{t}$$

mające rozwiązanie postaci

$$z(t) = -\frac{1}{t^2 + C}.$$

Wracając do oryginalnych zmiennych otrzymujemy rozwiązanie

$$y(t) = -\frac{t}{t^2 + C}.$$

❑

Przykładowe zadania

Zadanie 18. Udowodnij, że równanie Bernoulliego $x' + a(t)x = b(t)x^m$, $m \in \mathbb{R}$, sprowadza się przez zamianę zmiennych $z(t) = x(t)^{1-m}$ do równania liniowego. Rozwiąż równania: $a)\, tx' + x = x^2 \log t$, $b)\, x' = tx + t^3x^2$.

Zadanie 19. Równanie postaci $x' + a(t)x = b(t)x^2 + f(t)$, gdzie a, b, f są danymi funkcjami, nazywa się równaniem Riccatiego. Nie istnieje ogólny sposób całkowania tego równania. Udowodnij, że jeżeli znamy jedno rozwiązania $x_1(t)$, to funkcja $u(t) = x(t) - x_1(t)$ spełnia równanie Bernoulliego.

Zadanie 20. Znaleźć rozwiązania szczególne następujących równań Riccatiego, zredukować je do równań typu Bernoulliego i scałkować:
$a)\, t^2x' + tx + t^2x^2 = 4$, $b)\, x' + 2xe^t - x^2 = e^{2t} + e^t$.

Zadanie 21. Równania postaci $dy/dt = f(y/t)$, gdzie f jest daną funkcją, nazywamy równaniem jednorodnym. Udowodnij, jeżeli y jest rozwiązaniem równania jednorodnego, to funkcja $v(t) = y(t)/t$ spełnia równanie o zmiennych rozdzielonych $t(dv/dt) + v = f(v)$.

Zadanie 22. Rozwiąż równania jednorodne:
$a)\, 2x + t - tx' = 0$, $tx' = x - te^{x/t}$, $b)\, tx' = x \cos\left(\log \frac{x}{t}\right)$.

Rozdział 3

Zastosowania równań różniczkowych I-go rzędu

Z uwagi na to, że pierwszą pochodną z reguły interpretuje się jako tempo wzrostu badanej wielkości, najczęstsze zastosowanie równań różniczkowych pierwszego rzędu sprowadza się do zapisu prawa rządzącego tym wzrostem.
Oznaczmy przez $N(t_i)$ badaną wielkość (np. liczbę osobników w populacji, temperaturę ciała, itp.). Wartość w następnej chwili pomiaru t_{i+1} zależy oczywiście od wartości w chwili poprzedzającej (czyli t_i), od czasu jaki upłynął od porzedniego pomiaru, a także (w zależności od przyjętego modelu) od np. pewnej części $N(t_i)$. Tak jest np. w badaniach nad populacją, gdzie w najprostszych modelach przyjmuje się, że przyrost populacji jest wprost proporcjonalny od ilości osobników w danej chwili (i oczywiście, od przyrostu czasu), co moglibyśmy zapisać następująco:

$$N(t_{i+1}) = N(t_i) + mN(t_i)(t_{i+1} - t_i) \Leftrightarrow N(t_{i+1}) - N(t_i) = mN(t_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Dzieląc przez przyrost czasu otrzymujemy równanie

$$\frac{N(t_{i+1}) - N(t_i)}{(t_{i+1} - t_i)} = mN(t_i).$$

Zakładając, że liczba podziałów jest rozłożona równomiernie na całej osi tzn. liczba podziałów w przedziale czasu $(t, t + \Delta t)$ zależy od Δt a nie t możemy zapisać ostatnie równanie jako

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = mN(t).$$

Traktując $N(t)$ jako pewną miarę gęstości rozpatrywanej wielkości i przechodząc z przyrostem czasu do zera, otrzymujemy przykładowe równanie różniczkowe

$$N'(t) = mN(t).$$

Jak już wspomnieliśmy, jednym z najczęściej przywoływanych przykładów zastosowań równan pierwszego rzędu są

3.1 Modele wzrostu populacji

Na poniższych przykładach, zobaczymy nie tylko, jak można stosować równania różniczkowe w modelowaniu wzrostu populacji, ale także jakie ograniczenie przy tym napotykamy i jak można (a przynajmniej można próbować) przezwyciężyć.

Przegląd ten zaczniemy od jednego z najprostszych modeli, tzn. zaprezentujemy

- **Model Malthusa**

  W modelu tym, zaproponowanym przez T. R. Malthusa, zakłada się, że prędkość wzrostu populacji jest proporcjonalna do jej liczebności. Przyjmując oznaczenie ilości osobników przez $P(t)$, równanie zaproponowane przez Malthusa zapisujemy następująco

  $$P'(t) = aP(t),$$

  $$P(t_0) = P_0,$$

  gdzie a jest współczynnikiem proporcjonalności, a P_0 jest początkową liczebnością populacji. Rozwiązanie dane jest wzorem

  $$P(t) = P_0 e^{a(t-t_0)}.$$

  Wadą tego rozwiązania jest fakt, że przy t dążącym do $+\infty$, wartość $P(t)$ również dąży do nieskończoności, co sugerowałoby nieograniczony wzrost liczby populacji.

  Jak łatwo się przekonać, gdyby bakteria rozmnażały się wedle tego wzoru to zaczynając od 1 bakterii masa całej populacji po 1 dniu równałaby się wadze jaja strusiego, po dwóch - masie komety Halleya, trzech - Jowisza, a po czterech już całej galaktyki :-).

Wydaje się, że przedstawiony powyżej model ma małe zastosowanie, jednak pamiętać musimy, że każdy model ma ograniczony zakres (czasu, parametrów, ...) w którym jego stosowanie jest uprawomocnione.

Nawet dla tak prostego modelu można znaleźć przykłady gatunków których rozwój populacji dobrze on opisuje ([2]).

- **model von Foerstera**

W 1960 r. Heinz von Foerster zaproponował, w artykule w "Science", model wzrostu populacji w którym tempo przyrostu populacji jest wprost proporcjonalne nie do jej ilości (jak w modelu Malthusa), ale do kwadratu tej wielkości. Zatem model ten wygląda następująco:

$$P(t)' = aP^2(t)$$

$$P(t_0) = P_0.$$

Pomimo, że wzrost w tym modelu jest większy niż w modelu Malthusa model ten przez wiele lat znakomicie się sprawdzał (oczywiście w pewnych ograniczonych ramach czasowych, w odniesieniu do np. społeczeństw rozwiniętych - [2]).

Wadą tego modelu (w istocie nawet poważniejszą niż modelu Malthusa) jest fakt, że w skończonym czasie rozwiązanie eksploduje. Istotnie, z rozwiązania danego wzorem

$$P(t) = P_0 \frac{a}{1 - aP_0 t}$$

jasno wynika, że przy $t \to T_{KS} = \frac{1}{P_0 a}$ rozwiązanie $P(t)$ dąży do nieskończoności.

Nota bene Foerster wyliczył wspomniane $T_{K(oniec)\ S(wiata)}$ = piątek, 13 XI 2026. (L. W. Amiot, P. M. Mora, H. von Foerster, *Doomsday: Friday, November 13, AD 2026*, Science **132** (1960), 1291–1295).

- **model Benjamina Gompertza**

Wspomniane wady powyższych modeli i im podobnych spowodowały pojawienie się nowego modelu w którym wprowadzono nowy czynnik - odpowiadający za tłumienie pochodnej dla dużych wartości czasu. Model Gompertza wygląda w sposób następujący:

$$P'(t) = \lambda e^{\alpha t} P(t),$$

$$P(t_0) = P_0,$$

gdzie $\lambda > 0$ jest współczynnikiem proporcjonalności, a $\alpha < 0$ jest stałą która powoduje, że dla dużych czasów $P'(t)$ będzie mała.

Rozwiązanie, dane wzorem

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{\alpha(t-t_0)})}$$

nie ma już wady poprzednich modeli. Istotnie, gdy $t \to +\infty$ wartości $P(t)$ dążą do $P_0 e^{\frac{\lambda}{|\alpha|}}$.

- **model P.F. Verhulsta (1837)**

O ile w modelu Gompertza za "tłumienie" pochodnej był odpowiedzialny czynnik zależny od czasu ($e^{\frac{\lambda}{|\alpha|}}$) o tyle w modelu P.F. Verhulsta (znanego bardziej jako **logistyczny**) za to by rozwiązanie nie osiągnęło zbyt dużej wartości odpowiada samo rozwiązanie. Zauważmy bowiem, że w modelu tym

$$P(t)' = aP(t) - bP^2(t) = bP(t)\left(\frac{a}{b} - P(t)\right), \quad a > 0, b > 0,$$

$$P(t_0) = P_0,$$

prawa strona równania różniczkowego dla $P(t)$ większego niż $\frac{a}{b}$ implikuje ujemny znak pochodnej, a co za tym idzie malenie wartości rozwiązania. W rozwiązaniu tym, danym wzorem

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-a(t-t_0)}}$$

tempo wzrostu początkowo jest bardzo duże, by po pewnym czasie zmaleć prawie do zera.

Dla $t \to +\infty$ rozwiązanie zbiega do wartości $\frac{a}{b}$ - nazywanej niekiedy **pojemnością środowiska**.

3.2 Stygnięcie ciała

Innym, klasycznym zastosowaniem równań pierwszego rzędu jest zagadnienie stygnięcia ciała. Oznaczając przez $T(t)$ - temperaturę ciała w chwili t a przez T_o - temperaturę otoczenia, równanie opisujące ten proces ma postać

$$T'(t) = k(T(t) - T_o),$$

$$T(0) = T_0,$$

gdzie k jest współczynnikiem właściwym dla danego ciała i jest wyznaczane doświadczalnie. Jak widać jest to proste równanie liniowe niejednorodne o rozwiązaniu

$$T(t) = T_o + (T_0 - T_o)e^{-kt}.$$

Jak wszystkie i ten model ma wady - wystarczy zauważyc, że zgodnie z tym modelem temperatura ciała nigdy nie osiągnie temperatury otoczenia (choć będzie dowolnie blisko).

3.3 Geometria - krzywe ortogonalne

Innym, nie fizycznym a geometrycznym, zastosowaniem równań pierwszego rzędu jest problem wyznaczania krzywych ortogonalnych.

Definicja.
Krzywą ortogonalną *do danej krzywej jest każda krzywa, która przecina daną pod kątem prostym (kąt pod jakim przecinają się dwie krzywe, wyznacza się na podstawie kąta przecięcia stycznych w punkcie przecięcia).*

Mając daną rodzinę krzywych opisaną równaniem uwikłanym

$$F(x, y, C) = 0,$$

spełnia ona równanie

$$0 = \frac{F}{dx} = F_x + F_y y'.$$

Łatwo więc zauważyć, że współczynnik kierunkowy stycznej dany jest wzorem $y' = -\frac{F_x}{F_y}$, o ile $F_y \neq 0$. Ponieważ współczynniki kierunkowe: α_1 - prostej i α_2 - prostej do niej prostopadłej, powiązane sa zależnością $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$, tak więc $\tilde{y}'$ - współczynniki kierunkowe stycznych do krzywych ortogonalnych do danej rodziny krzywych wyrażane są równością:

$$\tilde{y}' = -\frac{1}{y'} = \frac{F_x}{F_{\tilde{y}}}.$$

Przykład 11.
Rozpatrzmy rodzinę okręgów o środku w punkcie $(0,0)$, $x^2 + y^2 = C$. Dla tej rodziny

$$F(x, y, C) = x^2 + y^2 - C.$$

Współczynniki kierunkowe stycznych wyliczamy na podstawie równania

$$y'(x) = -\frac{x}{y}.$$

Zatem współczynniki kierunkowe stycznych rodziny krzywych ortogonalnych spełniają równanie

$$y'(x) = \frac{y}{x},$$

co daje następującą rodzinę rozwiązań:

$$y(x) = Cx.$$

Możemy zatem stwierdzić, że rodziną krzywych ortogonalnych do okręgów o środkach w punkcie $(0,0)$ są proste przechodzące przez ten punkt. Rzeczywiście, jak łatwo sprawdzić rysując te dwie rodziny w układzie współrzędnych, każda prosta przecina dowolny okrąg pod kątem prostym.

❑

Przykładowe zadania

Zadanie 23. Pewna osoba uczy się pisać na maszynie. Niech N oznacza maksymalną liczbę słow jakie potrafi napisać ona napisać w ciągu minuty. Załóżmy, że prędkość zmian N (tzn. $N'(t)$) jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy N oraz górną granicą 140. Rozsądnym jest założyć, że na początku osoba ta nie potrafiła napisać żadnego słowa (tzn. $N(0) = 0$). Okazało się, że osoba ta potafi napisać 35 słów na minutę po 10 godzinach uczenia się.
a) Ile słów na minutę będzie pisać ta osoba po 20 godzinach uczenia się?
b) Jak długo musi ona ćwiczyć, aby napisać 105 słów na minutę?

Zadanie 24. Plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszły tę plotkę oraz liczby osób, ktore jeszcze nie słyszały tej plotki. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?

Zadanie 25. *(Inny model rozprzestrzeniania się plotki).* Założmy teraz, że plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób według prawa Gompertza:

$$\frac{dy}{dt} = kye^{-(73/520)t},$$

gdzie $y(t)$ jest liczą osób, które słyszały plotkę po t dniach. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?

Zadanie 26. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona). Zakładamy, że $S(0) = 100^oC$ w temperaturze otoczenia 20^oC. Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła 60^oC. Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę 25^oC?

Zadanie 27. Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. wynosiła ona $32,6^o$ C. Godzinę póżniej, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31,4^o$C. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21^oC. Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo – Jan G., twierdzi jednak, że jest nie winny. Ma alibi. Po połuniu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne?

Zadanie 28. *(Ciąg dalszy zadania poprzedniego)*. Obrońca Jana G. zauważył, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38,3^oC$. Załóżmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci. Czy możda dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił to morderstwo?

Rozdział 4

Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności

Ponieważ nie zawsze da się wypisać rozwiązanie równania jawnym wzorem w rozdziale tym zajmiemy się odpowiedzią na następujące pytanie: jakie warunki musi spełniać funkcja $f(t, y)$ (niezależnie od rozpatrywanych wcześniej typów równań) aby zagadnienie

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

miało (jednoznaczne) rozwiązanie - choć, być może, nie będziemy w stanie podać wzoru *explicite*.
Zanim udowodnimy ogólne twierdzenie - przykład, w którym zobaczymy, że nie zawsze rozwiązanie jest wyznaczone jednoznacznie.

Przykład 12.
Rozpatrzmy zagadnienie

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Zauważmy, że zagadnienie to ma jedno rozwiązanie $y(t) \equiv 0$. Innych rozwiązań będziemy szukać rozwiązując równanie jak równanie o rozdzielonych zmiennych. Istotnie mamy

$$\frac{y'(t)}{\sqrt{|y|}} = 1,$$

$$2\ln\sqrt{|y|} = \int \frac{y'(t)}{\sqrt{y}}\,dt = \int 1\,dt = t + C,$$

$$y(t) = \pm\left(\frac{t+C}{2}\right)^2. \tag{4.2}$$

Dla uproszczenia ograniczmy się tylko do rozwiązań nieujemnych. Uwzględnienie warunku początkowego $y(0) = 0$ implikuje $C = 0$. Zatem mamy (przynajmniej) dwa rozwiązania zagadnienia (4.1) $y_0(t) \equiv 0$ oraz $y_1(t) = \frac{t^2}{4}$.
Analizując zagadnienie (4.1) można zauważyć, że sklejenie rozwiązania zerowego z rozwiązaniem postaci (4.2) daje nam również nowe rozwiązania zagadnienia. Istotnie każda funkcja postaci

$$y_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leqslant A, \\ \left(\frac{t-A}{2}\right)^2 & \text{dla} \quad t > A, \end{cases}$$

jest rozwiązaniem zagadnienia (4.1) (łatwo sprawdzić, że w miejscu sklejenia $t = A$ rozwiązanie jest klasy C^1).

❑

Twierdzenie 4.0.1 *(Peano) Niech funkcja $f(t, y)$ będzie ciągła na prostokącie*

$$R = \{(t, y); t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a, |y - y_0| \leqslant b\}.$$

Oznaczmy przez

$$M = \max_{(t,y)\in R} |f(t, y)| \quad \textit{a przez} \quad \alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Wtedy zagadnienie

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

ma conajmniej jedno rozwiązanie na odcinku $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Zauważmy, że w twiedzeniu tym wymagana jest tylko ciągłość funkcji $f(t, y)$ na pewnym prostokącie. Jak nietrudno sprawdzić, funkcja $f(t, y) = \sqrt{y}$ z poprzedniego przykładu spełnia powyższy warunek na całej półpłaszczyźnie $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

Twierdzeniem które określi warunki wystarczające do zagwarantowania jednoznaczności rozwiązń jest twierdzenie następujące:

Twierdzenie 4.0.2 *(Picard-Lindelöf) Niech funkcje $f(t,y)$ oraz $\frac{\partial}{\partial y}f(t,y)$ będą ciągłe na prostokącie*

$$R = \{(t,y); t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a, |y - y_0| \leqslant b\}.$$

Oznaczmy przez

$$M = \max_{(t,y)\in R} |f(t,y)| \quad a\ przez \quad \alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Wtedy zagadnienie

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie na odcinku $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Uwaga.
Jak się już przekonaliśmy, zagadnienie rozpatrywane w ostatnim przykładzie nie ma jednoznacznego rozwiązania. Oczywiście nie może zatem spełniać założeń twierdzenia Picarda-Lindelöfa. Rzeczywiście, $\frac{\partial}{\partial y}f(t,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ nie jest ciągła w rozpatrywanym prostokącie (a nawet nie jest zdefiniowana dla $y = 0$!).

Osobnym problem jest czy twierdzenie Picarda-Lindelöfa pozwala uzyskać maksymalny przedział istnienia jednoznacznego rozwiązania. Na to pytanie odpowie następujący przykład.

Przykład 13.
Rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

w prostokącie $R = [0,a] \times [-b,b]$. Obliczmy wielkości używane w twierdzeniu Picarda-Lindelöfa.

$$M = \max_{(t,y)\in R} |f(t,y)| = \max_{(t,y)\in[0,a]\times[-b,b]} |y| = b,$$

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a, \frac{b}{b}\right\} = \min\{a, 1\} \leqslant 1.$$

Jasne jest zatem, że maksymalny przedział istnienia rozwiązania jednoznacznego (wynikający z zastosowania twierdzenia Picarda-Lindelöfa) jest niewiększy niż odcinek $[0,1]$.

Z drugiej strony łatwo potrafimy znaleźć szukane rozwiązanie. Jest to $y \equiv 0$, które oczywiście jest rozwiązaniem naszego zagadnienia na całej półprostej, a nie tylko na odcinku $[0, 1]$.

❑

Następny przykład przekona nas, że nie zawsze musi być tak źle i stosując twierdzenie Picarda-Lindelöfa można uzyskać istnienie rozwiązania na całej półprostej.

Przykład 14.
Rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} y' = t \sin t + e^{-(y^2+t)}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Rozważany prostokąt R to oczywiście $[0, a] \times [-b, b]$. Obliczmy M i α:

$$M = \max_{(t,y)\in R} |t \sin t + e^{-(y^2+t)}| \leqslant \max_{(t,y)\in R} |t \sin t| + \max_{(t,y)\in R} e^{-(y^2+t)} \leqslant t + 1 \leqslant a + 1,$$

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} = \min \left\{ a, \frac{b}{a+1} \right\}.$$

Ponieważ nie nakładaliśmy na a i b żadnych warunków, zatem możemy przyjąć przykładowo $a = T$ i $b = T(T + 1)$, co implikuje $\alpha = T$ i istnienie rozwiązań na odcinku $[0, T]$. Z uwagi na dowolność w wyborze T uzyskujemy istnienie (jednoznacznych) rozwiązań na całej półprostej $[0, +\infty)$.

❑

Zanim przystąpimy do dowodu twierdzenia Picarda-Lindelöfa zdefiniujmy niezbędne narzędzie w dowodzie twierdzenia - iterację Picarda.

Definicja.
Iteracją Picarda *dla zagadnienia*

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

nazywamy ciąg funkcji $y_n(t)$ określony następująco

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0, \\ y_1(t) &= y_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))\, ds, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_{n+1}(t) &= y_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds. \end{aligned}$$

Przykład 15.
Obliczymy iteracje Picarda dla zagadnienia

$$\begin{cases} y' = 2ty, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Mamy

$$\begin{array}{rcl} y_0(t) & = & 1 \\ y_1(t) & = & y_0 + \int_0^t f(s, y_0(s))\, ds = 1 + \ int_0^t 2s1\, ds = 1 + t^2, \\ y_2(t) & = & y_0 + \int_0^t f(s, y_1(s))\, ds = 1 + \int_0^t 2s(1+s^2)\, ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}, \\ y_3(t) & = & y_0 + \int_0^t f(s, y_2(s))\, ds = 1 + \int_0^t 2s(1+s^2+\frac{s^4}{2})\, ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!}. \end{array}$$

Nietrudno zauważyć, że

$$y_n(t) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \ldots + \frac{t^{2n}}{n!} = 1 + t^2 + \frac{(t^2)^2}{2!} + \frac{(t^2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(t^2)^n}{n!}.$$

Zatem

$$\lim_{n \to +\infty} y_n(t) = e^{t^2}.$$

Jak nietrudno sprawdzić jest to rzeczywiste rozwiązanie ropatrywanego zagadnienia.

❑

Ostatnim krokiem przed dowodem twierdzenia Picarda-Lindelöfa jest wykazanie równoważności dwóch sformułowań zagadnienia.

Twierdzenie 4.0.3 *Funkcja $y(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia różniczkowego*

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

wtedy i tylko wtedy gdy jest rozwiązaniem zagadnienia całkowego

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds. \tag{4.3}$$

Dowód.
$\Rightarrow$) Aby udowodnić tę implikację wystarczy odcałkować równanie $y'(t) = f(t, y)$ po odcinku (t_0, t) i podstawić warunek początkowy $y_0 = y(t_0)$.
$\Leftarrow$) Udowodnienie tej implikacji sprowadza się do zróżniczkowania równości (4.3). Otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds\right) = f(t, y(t)).$$

Warunek początkowy jest oczywiście spełniony. ❏

Dowód. (twierdzenia Picarda-Lindelöfa)
Dowód twierdzenie składa się z trzech kroków:

1) konstruujemy iterację Picarda dla zagadnienia różniczkowego i udowadniamy zbieżność ciągu $y_n(t)$ do pewnej funkcji $y(t)$,

2) udowadniamy, że tak otrzymana funkcja jest rozwiązaniem zagadnienia całkowego równoważnego z rozpatrywanym zagadnieniam różniczkowym,

3) korzystając z lematu Gronwalla, udowadniamy jednoznaczność rozwiązań.

Ad 1. Zapiszmy funkcję $y_n(t)$ w postaci tzw. sumy teleskopowej:

$$y_n(t) = (y_n(t) - y_{n-1}(t)) + (y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)) + \ldots + (y_2(t) - y_1(t))$$

$$+(y_1(t) - y_0(t)) + y_0(t) = y_0(t) + \sum_{k=1}^{n}(y_k(t) - y_{k-1}(t)).$$

Wykazując zbieżność szeregu, udowodnimy zbieżność ciągu funkcji $y_n(t)$.
Aby wykazać zbieżność szergu oszacujemy najpierw pojedyńczy wyraz szeregu.
Przyjmijmy oznaczenie:

$$L = \max_{(t,y)\in R}\left|\frac{\partial}{\partial y} f(t, y)\right|.$$

Podstawiając definicje y_k oraz y_{k-1} mamy

$$|y_k(t) - y_{k-1}(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(s, y_{k-1}(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y_{k-2}(s))\, ds|$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s, y_{k-1}(s)) - f(s, y_{k-2}(s)|)\, ds$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \left|\frac{\partial}{\partial y} f(s, \theta)\right| |y_{k-1}(s) - y_{k-2}(s)|\, ds.$$

W ostatniej nierówności zastosowaliśmy twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Ponieważ L jest wartością skończoną (zgodnie z założeniami twierdzenia pochodna jest funkcją ciągłą na domkniętym prostokącie R, zatem z tw. Weierstrassa jest funkcją ograniczoną) więc możemy zapisać następujące oszacowanie

$$|y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leqslant L \int_{t_0}^{t} |y_{k-1}(s) - y_{k-2}(s)|\, ds.$$

Ponieważ

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leqslant L \int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_0(s)|\, ds = L \int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_0(s)|\, ds$$

$$= L \int_{t_0}^{t} \left| \int_{t_0}^{s} f(x, y_0)\, dx \right| ds \leqslant ML \int_{t_0}^{t} (s - t_0)\, ds = ML \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

zatem

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leqslant L \int_{t_0}^{t} |y_2(s) - y_1(s)|\, ds \leqslant L \int_{t_0}^{t} ML \frac{(s - t_0)^2}{2}\, ds = ML^2 \frac{(t - t_0)^3}{3!}.$$

Powtarzając powyższe rozumowanie łatwo już (indukcyjnie) dowieść, że

$$|y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leqslant ML^{k-1} \frac{(t - t_0)^k}{k!}.$$

Mając oszacowane w ten sposób kolejne wyrazy badanego szeregu możemy udowodnić jego zbieżność. Istotnie, mamy

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leqslant \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{n} \frac{(L(t - t_0))^k}{k!} = \frac{M}{L} (e^{L(t - t_0)} - 1)$$

co implikuje zbieżność szeregu a zatem zbieżność ciągu funkcji $y_n(t)$ do pewnej funkcji $y(t)$.

Ad. 2. Skoro wiemy już, że ciąg funkcji $y_n(t)$ zbiega do pewnej granicy zbadajmy czym ona jest. Przechodząc do granicy w definicji iteracji Picarda otrzymujemy

$$\lim_{n \to \infty} y_{n+1}(t) = y_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds.$$

Tak więc granica spełnia równość

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

z czego wynika, że jest również (na mocy Twierdzenia 4.0.3) rozwiązaniem rozpatrywanego zagadnienia różniczkowego.
Aby uzasadnić możliwość przejścia z granicą pod całkę (a przy okazji szacując różnicę $|y(t) - y_n(t)|$) zauważmy, że

$$|y(t) - y_{n+1}(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, y_n(s))|\, ds \leqslant L \int_{t_0}^{t} |y(s) - y_n(s)|\, ds.$$

Korzystając z zapisu w postaci sumy teleskopowej i przeprowadzając podobne rozumowanie jak w części pierwszej otrzymujemy

$$|y(t) - y_{n+1}(t)| \leqslant L \int_{t_0}^{t} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |y_i(s) - y_{i-1}(s)|\, ds \leqslant L \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{t_0}^{t} |y_i(s) - y_{i-1}(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{t_0}^{t} L^i \frac{(t-t_0)^i}{i!}\, ds \leqslant M \sum_{k=n+1}^{+\infty} L^i \frac{(t-t_0)^{i+1}}{(i+1)!}.$$

z uwagi na zbieżność ostatniego szeregu łatwo zauważyć, że $|y(t) - y_n(t)| \to_{n\to\infty} 0$

Ad. 3. W dowodzie jednoznaczności rozwiązań kluczową rolę odgrywa następujący

Lemat. *(Gronwall) Niech nieujemna funkcja $U(t)$ spełnia nierówność*

$$u(t) \leqslant a + b \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds \tag{4.4}$$

dla $a, b \geqslant 0$. Wtedy

$$u(t) \leqslant a e^{b(t-t_0)}$$

dla każdego $y \geqslant t_0$.

Dowód. Zdefiniujmy nową funkcję $U(z) = a + b\int_{t_0}^{z} u(s)\, ds$ spełniającą równanie różniczkowe

$$U'(z) = bu(z),$$

a z uwagi na (4.4) również nierówność

$$U'(z) = bu(z) \leqslant b\left(a + b\int_{t_0}^{z} u(s)\, ds\right) = bU(z).$$

Mnożąc powyższą nierówność przez $e^{-b(z-t_0)}$ i całkując po odcinku $[t_0, t]$ otrzymujemy

$$U(t) \leqslant U(t_0)e^{b(t-t_0)}.$$

Korzystając z nierówności (4.4) i faktu, że $U(t_0) = a$ otrzymujemy żądaną nierówność

$$u(t) \leqslant a + b\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds = U(t) \leqslant ae^{b(t-t_0)}.$$

❏

Mając tak silne narzędzie w postaci lematu Gronwalla użyjemy go do dowiedzenia jednoznaczności rozwiązań naszego zagadnienia.
Załóżmy (nie wprost), że istnieją dwa rozwiązania naszego zagadnienia - $y_1(t)$ i $y_2(t)$. Korzystając z twierdzenie Lagrange'a oraz z faktu, że obie funkcje są również rozwiązaniami zagadnienia całkowego, możemy napisać

$$|y_1(t) - y_2(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}(f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))\,ds\right| \leqslant L\int_{t_0}^{t}|y_1(s) - y_2(s)|\,ds.$$

Stosując lemat Gronwalla do funkcji $u(t) = |y_1(t) - y_2(t)|$ z $a = 0$ i $b = L$ otrzymujemy

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant 0,$$

co implikuje $y_1(t) \equiv y_2(t)$ a więc jednoznaczność rozwiązań.

Tym samym dowód twierdzenia Picarda-Lindelöfa jest zakończony. ❏

Przykładowe zadania

Zadanie 29. Oblicz pierwsze dwie iteracje Picarda dla zagadnienia $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

Zadanie 30. Oblicz pierwsze trzy iteracje Picarda dla zagadnienia $y' = e^t + y^2$, $y(0) = 0$.

Zadanie 31. Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda $y_n(x)$ i oblicz jej granicę gdy $n \to \infty$ dla podanych zagadnień Cauchy'ego:
a) $y' = -y, \quad y(0) = 1$ b) $y' = x + y, \quad y(0) = 1$
c) $y' = 2xy, \quad y(0) = 1$ d) $y' + y^2 = 0, \quad y(0) = 0$

Zadanie 32. Oblicz kolejne iteracje Picarda dla zagadnienia Cauchy'ego $y' = 2t(y + 1)$, $y(0) = 0$ i udowodnij, że zbiegają one do rozwiązania $y(t) = e^{t^2} - 1$.

Zadanie 33. Udowodnij, że $y(t) = -1$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia
$y' = t(1 + y)$, $y(0) = -1$. (Wsk. zastosuj Lemat Gronwalla.)

Zadanie 34. Dla podanich niżej zagadnień Cauchy'ego udowodnij, że rozwiązanie $y = y(t)$ istnieje na zadanym przedziale. Powtarzając rozumowanie podane na wykladzie udowodnij, że jest to jedyne rozwiązanie.
a) $y' = y^2 + \cos t^2; \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2$
b) $y' = 1 + y + y^2 \cos t; \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/3$
c) $y' = t + y^2; \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant (1/2)^{2/3}$
d) $y' = e^{-t^2} + y^2; \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2$
e) $y' = e^{-t^2} + y^2; \quad y(1) = 0; \quad 1 \leqslant t \leqslant 1 + \sqrt{e}/2$

Zadanie 35. Rozważamy zagadnienie początkowe $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 0$. Niech R będzie prostokątem $0 \leqslant t \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$. Udowodnij poniższe stwierdzenia.
a) Rozwiązanie tego zagadnienia $y(t)$ istnieje dla $0 \leqslant t \leqslant \min\{a, b/(a^2 + b^2)\}$.
b) Przy ustalonym a, maksymalną wartością wyrażenia $b/(a^2 + b^2)$ jest $1/(2a)$.
c) Maksymalna wartość wyrażenia $\min\{a, 1/(2a)\}$ jest przyjmowana dla $a = 1/\sqrt{2}$.
d) Rozwiązanie $y(t)$ istnieje na przedziale $0 \leqslant t \leqslant 1/\sqrt{2}$.

Zadanie 36. Wskaż przedział (możliwie największy), na którym istnieje rozwiązanie zagadnienia:
a) $y' = 2y^2 - t$, $y(1) = 1$; b) $y' = t + e^y$, $y(1) = 0$.

Zadanie 37. Uzasadnij, że zagadnienie $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$ nie ma rozwiązania określonego na całej prostej.

Zadanie 38. Czy wykresy dwóch różnych rozwiązań danego równania mogą się przecinać w pewnym punkcie (t_0, y_0) jeżeli równaniem tym jest:
a) $y' = y^2 + t$, b) $y' = y^{1/2}$?
Wyznacz możliwie wszystkie takie punkty (t_0, y_0).

Zadanie 39. Znajdź rozwiązanie zagadnienia $y' = t\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 1$, różne od rozwiązania $y(t) \equiv 1$. Które z założeń Tw. Picarda-Lindelöfa nie jest spełnione?

Zadanie 40. Wyznaczyć nieskończenie wiele rozwiązań równania $y' = 2y^{1/2}$ z warunkiem początkowym $y(0) = 0$. Które z założeń Tw. Picarda-Lindelöfa nie jest spełnione?

Zadanie 41. Inny dowód uproszczonej wersji Lematu Gronwalla. Niech $w(t)$ będzie nieujemną ciągłą funkcją spełniającą

$$w(t) \leqslant L \int_{t_0}^{t} w(s)\, ds$$

na odcinku $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha$. Ponieważ w jest ciągła, istnieje taka stała A, że $0 \leqslant w(t) \leqslant A$ dla wszystkich $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha$.
a) Udowodnij, że $w(t) \leqslant LA(t - t_0)$.
b) Użyj tego oszacowania do dowodu, że $w(t) \leqslant AL^2(t - t_0)^2/2$.
c) Pokaż indukcyjnie, że $w(t) \leqslant AL^n(t - t_0)^n/n!$.
d) Udowodnij, że $w(t) = 0$ dla $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha$.

Rozdział 5

Wstęp do metod numerycznych

5.1 Schemat Eulera

Istnienie rozwiązania, które możemy wypisać wzorem, jest niestety rzadkością w świecie równań różniczkowych (oczywiście poza tendencyjnie dobranymi przykładami na wykładzie :-)). Jednocześnie tw. Picarda-Lindelöfa gwarantuje namm szeroka klasę równań o których wiemy, że posiadają rozwiązanie (chćby lokalne w czasie). Wspomniane twierdzenie podaje nawet konstrukcję rozwiązania (jako granicy ciągu iteracji Picarda), ale z praktycznego punktu widzenia nie jest to definicja zbyt użyteczna.
Pewnym pomysłem na to jak wygląda przybliżona postać rozwiązania jest zastąpienie pochodnej w punkcie t_0, prawą stroną równania (mamy bowiem $y'(t_0) = f(t_0, y)$) i założenie, że w otoczeniu t_0 rozwiązanie daje sie przybliżyć funkcją liniową, czyli

$$y(t) \approx y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0),$$

dla małych wartości $t - t_0$.

5.1.1 Konstrukcja schematu Eulera

Powyższy pomysł ma swoje odzwierciedlenie w nastepującej definicji:

Definicja.
Schematem Eulera *(o kroku h) dla zagadnienia*

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

nazywać będziemy ciąg $\{y_i\}$ zdefiniowany w sposób następujący:

$$y_0 = y(t_0),$$

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)h$$

gdzie

$$t_{k+1} = t_0 + kh.$$

Przykład 16.
Rozpatrzmy zagadnienie:

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Zagadnienie to ma oczywiście rozwiązanie dane wzorem $y(t) = e^t$. Jak wygląda schemat Eulera dla tego zagadnienia? Przyjmijmy $h = \frac{1}{10}$ i obliczmy:

$$y_0 = y(0) = 1,$$

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)h = 1 + \frac{1}{10} \cdot 1 = 1,1,$$

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)h = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}(1 + \frac{1}{10}) = 1,1 + 0,11 = 1,21,$$

$$y_3 = y_2 + f(t_2, y_2)h = 1,21 + \frac{1}{10}(1,21) = 1,21 + 0,121 = 1,331.$$

$$\dots$$

Zatem wartość schematu Eulera dla $t = \frac{3}{10}$ wynosi $1,331$. A jak się to ma do prawdziwej wartości rozwiązania?

$$y\left(\frac{3}{10}\right) = e^{\frac{3}{10}} \approx 1,349$$

czyli nie jest tak źle jakby wyglądało patrząc na pewien prymitywizm metody :-).

Oczywiście manipulując wartością h możemy dostawać lepsze lub gorsze przybliżenie prawdziwej wartości rozwiązania. Biorąc np. $h = \frac{3}{10}$, już w pierwszym kroku przybliżamy prawdziwą wartość rozwiązania $y(\frac{3}{10})$. Mamy mianowicie:

$$y_0 = y(0) = 1,$$

$$y_1 = 1 + f\left(\frac{3}{10}, 1\right)\frac{3}{10} = 1 + \frac{3}{10} = 1,3,$$

co oczywiście jest gorszym przybliżeniem wartości rozwiązania.

Biorąc zaś mniejszy krok, np. $h = \frac{1}{20}$ otrzymamy lepsze przybliżenie (ale musimy wykonać sześć kroków zamiast 3).

5.1.2 Analiza błędu

W części tej przeanalizujemy, jak duży błąd popełniamy, konstruując schemat Eulera o kroku h.

Założenia: przyjmijmy, że funkcje f, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ są ciągłe na prostokącie

$$R := \{(t,x) : \ \theta_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a, \ |y - y_0| \leqslant b\}.$$

Wprowadzmy dodatkowe oznaczenia:

$$M := \max_{(t,y)\in R} |f(t,y)|, \qquad L := \max_{(t,y)\in R} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|, \qquad D := \max_{(t,y)\in R} \left|\frac{\partial f}{\partial t} + f(t,y)\frac{\partial f}{\partial y}\right|,$$

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Przedstawmy użyteczny lemat (na razie bez dowodu)

Lemat. *Niech $E_0, E_1, , \ldots, E_i, \ldots$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, $E_0 = 0$. Jeśli*

$$E_{k+1} \leqslant AE_k + B$$

to

$$E_k \leqslant \frac{B}{A-1}(A^k - 1).$$

Będziemy chcieli teraz oszacować różnicę między k-tym krokiem schematu Eulera a wartością rozwiązania w punkcie t_k, tzn. $|y(t_k) - y_k|$.
Przypomnijmy, że rozwijając funkcję $y(t)$ w szereg Taylora (do drugiego rzędu) możemy napisać:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k + h) = y(t_k) + y'(t_k)h + \frac{y''(\theta)}{2}h^2$$

a ponieważ rozpatrujemy równanie $y' = f(t, y)$ mamy również:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(y(t)) &= \frac{d}{dt}(y'(t)) = \frac{d}{dt}f(t, y) = \left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dy}y'\right)(t)\\ &= \left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dy}f\right)(t) \leqslant \max_{(t,y)\in R}\left|\frac{\partial f}{\partial t} + f(t, y)\frac{\partial f}{\partial y}\right| = D. \qquad (5.1)\end{aligned}$$

Wracając zatem do głównego toku rozumowania mamy

$$|y(t_{k+1}) - y_{k+1}| = |y(t_k) + y'(t_k)h + \frac{y''(\theta)}{2}h^2 - y_k - f(t_k, y_k)h|$$

$$\leqslant |y(t_k) - y_k| + |f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)|h + |\frac{y''(\theta)}{2}|h^2$$

$$\leqslant |y(t_k) - y_k| + |y(t_k) - y_k|\left|\frac{df}{dy}(\xi)\right|h + \frac{Dh^2}{2} \leqslant |y(t_k) - y_k|(1 + Lh) + \frac{Dh^2}{2}.$$

W powyższym rozumowaniu skorzystaliśmy z twierdzenia o wartości średniej i oszacowania (5.1).

Pora zastosować lemat 5.1.2. Niech

$$A = 1 + Lh, \qquad B = \frac{Dh^2}{2}, \qquad E_0 = |y(t_0) - y_0| = 0$$

Zatem stosując lemat otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$|y(t_k) - y_k| \leqslant \frac{Dh^2}{2Lh}((1 + Lh)^k - 1).$$

Proste oszacowanie $1 + x < e^x$ zastosowane powyżej dla $x = Lh$ daje

$$|y(t_k) - y_k| \leqslant \frac{hD}{2L}(e^{Lhk} - 1). \tag{5.2}$$

Zauważmy, że k - ilość kroków pomnożona przez h- długość kroku musi być mniejsza niż α - przedział na którym udowodniliśmy (z tw. Picarda-Lindelöfa) istnienie jedynego rozwiązania. Zatem dla $hk \leqslant \alpha$ zachodzi

$$|y(t_k) - y_k| \leqslant \frac{hD}{2L}(e^{\alpha L} - 1). \tag{5.3}$$

Jak widać to oszacowanie nie zależy od k.

Procedura. Załóżmy, że chcemy wyznaczyć wielkość h jaką musimy przyjąć w schemacie Eulera by błąd pomiędzy schematem Eulera a prawdziwym rozwiązaniem był mniejszy niż ε, niezależnie od czasu t.

W tym celu, opierając się na wzorze (5.3) musimy
- wyznaczyć stałe M, L, D oraz udowodnić istnienie i jednoznaczność rozwiązań dla danego zagadnienia (z tw. Picarda-Lindelöfa) na odcinku $[t_0, t_0 + \alpha]$,
- a następnie rozwiązać nierówność

$$\frac{hD}{2L}(e^{\alpha L} - 1) \leqslant \varepsilon$$

co daje następujące oszacowanie kroku h

$$h \leqslant \varepsilon \frac{2L}{D(e^{\alpha L} - 1)}. \tag{5.4}$$

5.2 Inne schematy numeryczne

Przy oznaczeniach jak powyżej przedstawmy inne schematy numeryczne dla zagadnienia

$$y'(t) = f(t, y),$$
$$y(t_0) = y_0.$$

Dla oznaczeń (podobnie jak powyżej)

$$y_0 = y(t_0), \qquad t_{k+1} = t_0 + kh$$

poszczególne schematy wyglądają następująco:

1. Schemat Taylora

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)h + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} f(t_k, y_k) + f(t_k, y_k)\frac{\partial}{\partial y} f(t_k, y_k)\right).$$

2. Zmodyfikowany schemat Eulera

$$y_{k+1} = y_k + f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right) h.$$

3. Schemat Heuna

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k) + \frac{h}{2} f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))$$

Więcej schematów oraz analizę błędu dla nich można znaleźć np. w książce A. Palczewskiego [6].

Przykładowe zadania

Zadanie 42. Używając metody Eulera z krokiem $h = 0,1$ wyznacz przybliżoną wartość rozwiązania dla $t = 1$. Oszacuj błąd jaki popełniamy. Nastęnie znajdź rozwiązanie podanego zagadnienienia i porównaj otrzymaną wartość z wartością rzeczywistą.
$y' = 1 + t - y$, $y(0) = 0$; $\qquad y' = 2ty$, $y(0) = 2$; $\qquad y' = 1 + y^2 - t^2$, $y(0) = 0$.

Zadanie 43. Oszacuj błąd jaki popełniamy używając metody Eulera z krokiem h aby znaleźć przybliżoną wartość rozwiązania zagadnienia $y' = (t^2 + y^2)/2, \quad y(0) = 1$ dla dowolnego $t \in [0, 2/5]$. Wskazówka: Rozważaj prostokąt R: $0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$.

Zadanie 44. Wyznacz odpowiednią wielkość kroku h w metodzie Eulera tak aby błąd, który popełniamy wyznaczając wartośći rozwiązania zagadnienia $y' = e^y - y^2, \quad y(0) = 0$ w dowolnym punkcie $t \in [0, 1/e]$ był nie większy niż 0,0001.

Rozdział 6

Równania liniowe drugiego rzędu

Równaniem liniowym drugiego rzędu nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t), \tag{6.1}$$

gdzie $p(t), q(t)$ i $f(t)$ są ciągłymi funkcjami zmiennej t.

Równanie w którym $f(t) \equiv 0$ nazywamy **jednorodnym** zaś, gdy $f(t) \neq 0$ - równaniem **niejednorodnym**.

Równania drugiego rzędu uzupełniamy dwoma warunkami. Z reguły są to warunki początkowe dla szukanej funkcji i jej pochodnej, tzn.:

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_1.$$

Przykład 17.
Jedno z najprostszych równań drugiego rzędu, to równanie:

$$y''(t) = y(t).$$

Nietrudno zgadnąć, że rozwiązaniami tego równania są funkcje e^t oraz e^{-t}. Jak pokażemy, rozwiązanie ogólne rozważanego równania jest kombinacją liniową powyższych rozwiązań.

❏

Rozpatrzmy najpierw

6.1 Równania liniowe II-go rzędu, jednorodne

Twierdzenie które gwarantuje istnienie jednoznacznego rozwiązania ma postać

Twierdzenie 6.1.1 *Niech funkcje $p(t)$ i $q(t)$ będą ciągłe na odcinku (α, β). Niech $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Wtedy zagadnienie*

$$\begin{aligned} &y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ &y(t_0) = y_0, \\ &y'(t_0) = y_1. \end{aligned}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

Nie będziemy dowodzić tego twierdzenia w całej ogólności, ograniczymy się tylko do wyznaczenia rozwiązań dla szczególnych klas równan liniowych.

Wprowadźmy teraz nowe pojęcie:

Definicja.
Wyznacznikiem Wrońskiego *(inaczej* **wrońskianem***) funkcji $y_1(t)$ oraz $y_2(t)$ nazywamy wyznacznik*

$$W[y_1(t), y_2(t)] = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Oczywiście pojęcie wrońskianu można uogólnić na przypadek trzech i więcej funkcji (bierze się wtedy odpowiednią ilość pochodnych tychże funkcji).

Definicja.
Mówimy, że funkcje $y_1(t)$, $y_2(t)$ są **liniowo niezależne***, jeśli wrońskian $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$ dla każdego t.*

Następne twierdzenie będzie uzasadnieniem stwierdzenia z przykładu 17.

Twierdzenie 6.1.2 *Niech funkcje $p(t)$ i $q(t)$ będą ciągłe dla $t \in [\alpha, \beta]$. Niech będą dane dwa rozwiązania $y_1(t)$ i $y_2(t)$ równania*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{6.2}$$

na odcinku $[\alpha, \beta]$. *Załóżmy dodatkowo, że rozwiązania te są liniowo niezależne. Wtedy funkcja*

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

będąca kombinacją liniową funkcji $y_1(t)$ *i* $y_2(t)$ *dla dowolnych stałych* C_1 *i* C_2 *jest rozwiązaniem ogólnym równania* (6.2).

Dowód. Ponieważ zarówno $y_1(t)$ jak i $y_2(t)$ są rozwiązaniami równania (6.2), więc ich kombinacja liniowa jest również rozwiązaniem. Pozostaje udowodnić, dla dowolnych warunków początkowych y_0, y_1 istnieją stałe C_1, C_2 takie, by spełnione były warunki początkowe. Podstawiając funkcję $y(t)$ do równan spełnianych przez warunki początkowe otrzymujemy

$$\begin{aligned} C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) &= y_0, \\ C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) &= y_1. \end{aligned}$$

Korzystając z wzorów Cramera dowodzimy, że powyższy układ (z szukanymi C_1 i C_2) ma rozwiązanie o ile

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ponieważ zakładaliśmy liniową niezależność rozwiązań $y_1(t)$ i $y_2(t)$ więc powyższy warunek jest zawsze spełniony, co kończy dowód.

❏

Jakkolwiek twierdzenie 6.1.1 implikuje istnienie jednoznacznych rozwiązań równania II-go rzędu, to nie zawsze jesteśmy w stanie podać rozwiązanie *explicite* - wzorem. Niekiedy jednak taki wzór możemy podać. A dzieje się tak zawsze w wypadku gdy badamy

6.1.1 Równania liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach

Jak nietrudno się domyślić, równania o stałych współczynnikach, to takie w których funkcje $p(t)$ oraz $q(t)$ są funkcjami stałymi tzn. postaci

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{6.3}$$

Pomysł na znalezienie roziwązania polega na szukaniu go wśród funkcji postaci

$$y(t) = e^{rt},$$

gdzie r jest pewną liczbą rzeczywistą.
Wyliczając pierwszą (re^{rt}) i drugą (r^2e^{rt}) pochodną funkcji $y(t)$ i podstawiając do równania (6.3) otrzymujemy:

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \iff e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Zatem funkcja $y(t) = e^{rt}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego, o ile r jest pierwiastkiem równania

$$ar^2 + br + c = 0,$$

nazywanego **równaniem charakterystycznym** (sam zaś wielomian ar^2+br+c nazwiemy **wielomianem charakterystycznym**).

Wystarczy więc rozpatrzeć trzy przypadki:

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ *(dwa, różne pierwiastki rzeczywiste)*

  Oznaczając pierwiastki przez r_1 i r_2 otrzymujemy następujące rozwiązania:

  $$y_1(t) = e^{r_1t}, \qquad y_2(t) = e^{r_2t}.$$

  Ponieważ

  $$W[y_1(t), y_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{t(r_1+r_2)} \neq 0,$$

  więc rozwiązania te są liniowo niezależne. Zgodnie zatem z twierdzeniem 6.1.2 rozwiązanie ogólne badanego równania różniczkowego wygląda następująco;

  $$y(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}. \tag{6.4}$$

- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ *(jeden, dwukrotny pierwiastek rzeczywisty)*

  Ponieważ mamy tylko jeden pierwiastek r_0 (i jedno rozwiązanie $y_1(t) = e^{r_0t}$), drugiego rozwiązania będziemy szukać wśród funkcji postaci:

  $$y_2(t) = f(t)e^{r_0t}.$$

Obliczając pochodne i podstawiając je do równania (6.3) otrzymujemy następującąrówność

$$a(f''(t)e^{r_0t} + 2f'(t)r_0e^{r_0t} + f(t)r_0^2e^{r_0t}) + b(f'(t)e^{r_0t} + f(t)r_0e^{r_0t}) + ce^{r_0t} =$$

$$= e^{r_0t}(f''(t)(ar_0^2 + br_0 + c) + f'(t)(2r_0a + b) + f(t)a) = af''(t)e^{r_0t}.$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że r_0 jest pierwiastkiem równania $ar_0^2 + br_0 + c = 0$ (co zeruje współczynnik przy f'') i ma postać $r_0 = -\frac{b}{2a}$ (a więc $2ar_0 + b = 0$).

Szukana funkcja $f(t)$ musi więc spełniać warunek $f''(t) = 0$, z czego wynika, że $f(t) = kt + l$, dla dowolnych k i l. Ponieważ le^{r_0t} jest już rozwiązaniem więc za drugie rozwiązanie $y_2(t)$ przyjmiemy funkcję te^{r_0t}.

Pozostaje nam tylko sprawdzić liniową niezależność obu rozwiązań. Mamy

$$W[y_1(t), y_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{r_0t} & te^{r_0t} \\ r_0e^{r_0t} & r_0te^{r_0t} + r_0e^{r_0t} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2r_0t} + r_0te^{2r_0t} - r_0te^{2r_0t} = e^{2r_0t} \neq 0,$$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania dane jest wzorem

$$y(t) = C_1e^{r_0t} + C_2te^{r_0t}. \tag{6.5}$$

- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ *(dwa, sprzężone pierwiastki zespolone)*

W tym przypadku pierwiastki mają postać $r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta$, rozwiązania zaś (zespolone!) wyglądają następująco:

$$y_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t), \quad y_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t).$$

Szukając rozwiązań rzeczywistych weźmy części rzeczywiste ($e^{\alpha t}\cos\beta t$) i urojone ($\pm e^{\alpha t}\sin\beta t$) rozwiązań zespolonych. Ponieważ części urojone obu rozwiązań są sobie równe (z dokładnością do stałej) więc wystarczy wziąć je dla tylko jednego z pierwiastków. Podobnie postępujemy dla części rzeczywistej (tutaj akurat części rzeczywiste rozwiązań dla obu pierwiastków są sobie równe). Jak nietrudno sprawdzić zarówno część rzeczywista jak i urojona rozwiązania zespolonego jest rozwiązaniem (rzeczywistym!) naszego równania.

Wrońskian dla tych rozwiązań równy jest

$$W[y_1(t), y_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\sin\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t + \beta\cos\beta t) \end{vmatrix} =$$

$$= \beta e^{2\alpha t} \neq 0,$$

z czego wynika ich liniowa niezależność. Zatem rozwiązanie ogólne równania dane jest wzorem

$$y(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + C_2 e^{\alpha t}\sin\beta t, \tag{6.6}$$

gdzie $\alpha = \mathrm{Re}\ r_1$, $\beta = \mathrm{Im}\ r_1$.

Zbiór liniowo niezależnych rozwiązań równania nazywamy **fundamentalnym zbiorem rozwiązań**.

6.2 Równania II-go rzędu, niejednorodne

Twierdzenie 6.2.1 *Rozpatrzmy równanie II-go rzędu liniowe, niejednorodne, tj. postaci:*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \tag{6.7}$$

gdzie $p(t), q(t)$, i $f(t)$ są funkcjami ciągłymi. Niech $\psi(t)$ będzie dowolnym rozwiązaniem równania (6.7)*, a $y_1(t)$ i $y_2(t)$ dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{6.8}$$

Wtedy rozwiązanie ogólne równania (6.7) *ma postać:*

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \psi(t). \tag{6.9}$$

Powyższe twierdzenie redukuje kwestię znalezienia rozwiązania ogólnego, do znalezienia jakiegoś rozwiązania szczególnego $\psi(t)$ (o ile potrafimy znaleźć rozwiązania równania jednorodnego).

Jak znaleźć takie szczególne rozwiązanie? Ograniczając się do równań o stałych współczynnikach zasadniczo dysponujemy dwiema metodami:

6.2.1 Metoda (usprawiedliwionego) zgadywania

Metoda ta opiera się na obserwacji, że pochodne wielomianów są również wielomianami, podobnie pochodne funkcji trygonometrycznych są funkcjami trygonometrycznymi a pochodne funkcji wykładniczych są funkcjami wykładniczymi.
Jeśli więc prawa strona równania (6.7) jest np. wielomianem, to rozwiązania szczególnego $\psi(t)$ szukać możemy pośród wielomianów itp.
Prezentowana metoda działa w wypadku, gdy prawa strona równania (czyli funkcja $f(t)$) jest, najogólniej, iloczynem wielomianu i funkcji wykładniczej (sinusy i cosinusy traktujemy jako części urojone i rzeczywiste odpowiednich funkcji wykładniczych).
Możemy sformułować następujące kryterium

Kryterium. *Rozpatrzmy równanie*

$$ay'' + by' + cy = e^{rt}w(t), \tag{6.10}$$

gdzie r jest liczbą zespoloną, a $w(t)$ jest wielomianem stopnia n. Jeśli r_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $ar^2 + br + c$, to $\psi(t)$ - rozwiązania szczególnego równania (6.10) *szukać należy wśród funkcji postaci*

$$t^k e^{rt} W(t)$$

gdzie $W(t)$ jest wielomianem tego samego stopnia co wielomian $w(t)$.

W powyższym kryterium przyjęliśmy, dla uproszczenia, konwencję, że jeśli r_0 nie jest pierwiastkiem wielomianu, to nazywamy go pierwiastkiem 0-krotnym.

Konieczność sprawdzenia czy r_0 jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego wiąże się z faktem, że w takim przypadku lewa strona równania obliczona na $e^{r_0 t}$ zawsze będzie dawała 0 (funkcja $e^{r_0 t}$ należy do jądra operatora określonego przez lewą stronę równania). Musimy zatem zmodyfikować nieco rozwiązanie, czego przykład mieliśmy już przypadku zerowego wyróżnika wielomianu charakterystycznego, dla równań jednorodnych.

Uwaga.
Jeśli funkcja $f(t)$ jest sumą kilku różnych funkcji, to rozwiązanie szczególne składać się będzie z sumy odpowiadających im rozwiązań szczególnych.

Przykład 18.
Rozpatrzmy przykład
$$y'' - y = \cos t.$$

Ponieważ $\cos t = \text{Re }(e^{0+it})$ rozpatrzymy najpierw równanie $y'' - y = e^{it}$, następnie biorąc część rzeczywistą rozwiązania zespolonego. Liczba i nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $r^2 - 1$, zatem rozwiązania szczególnego szukać będziemy wśród funkcji postaci
$$\psi(t) = Ce^{it}.$$

Podstawiając taką funkcję do badanego równania otrzymujemy
$$-Ce^{it} - Ce^{it} = e^{it},$$

z czego wnioskujemy, że $C = -\frac{1}{2}$. Oczywiście jest to rozwiązanie zespolone. Chcąc otrzymać rozwiązanie rzeczywiste bierzemy część rzeczywistą tego rozwiązania (bo prawa strona równania $\cos t = \text{Re }(e^{0+it})$).
Jak łatwo sprawdzić $\psi(t) = -\frac{1}{2}\cos t$ jest rzeczywistym rozwiązaniem rozpatrywanego równania.

❏

Przykład 19.
Rozpatrzmy przykład
$$y'' + 4y = \sin(2t) + 5te^t. \tag{6.11}$$

Z uwagi na to, że prawa strona równania jest sumą dwóch funkcji rozwiązanie szczególne będzie równiez sumą dwóch funkcji będących rozwiązaniami szczególnymi równań
$$y'' + 4y = \sin(2t), \qquad \text{i} \qquad y'' + 4y = 5te^t.$$

Zacznijmy od lewego równania. Podobnie jak w poprzednim przypadku $\sin(2t)$ jest częścią urojoną funkcji zespolonej e^{0+2it}. Ale, inaczej niż poprzednio $2i$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $r^2 + 4$. Zatem zespolonego rozwiązania szczególnego szukać będziemy wśród funkcji postaci
$$\psi_1(t) = Cte^{2it}.$$

Podstawiając do równania otrzymujemy następujący związek

$$4iCe^{2it} - 4Cte^{2it} + 4Cte^{2it} = e^{2it},$$

z czego wynika, że stała $C = \frac{1}{4i}$. Rozwiązanie zespolone będzie zatem postaci $\psi_1(t) = \frac{1}{4i}te^{2it} = t(\frac{1}{4}\sin(2t) - i\frac{1}{4}\cos(2t))$. Część urojona rozwiązania zespolonego, równa $-t\frac{1}{4}\cos(2t)$ jest poszukiwanym rozwiązaniem rzeczywistym.

Ponieważ 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, rozwiązania szczególnego dla drugiego równania poszukiwać będziemy wśród funkcji postaci

$$\psi_2(t) = (at + b)e^t.$$

Po podstawieniu do równania otrzymujemy równość

$$(at + a + b)e^t + 4(at + b)e^t = 5ate^t + (a + 5b)e^t = 5te^t,$$

z czego wnioskujemy, że $a = 1$ a $b = -\frac{1}{5}$.

Zatem, rozwiązanie szczególne równania (6.11) wygląda następująco:

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t) = -t\frac{1}{4}\cos(2t) + \left(t - \frac{1}{5}\right)e^t.$$

❏

6.2.2 Metoda uzmienniania stałej (parametru)

Druga z prezentowanych metod opiera się na założeniu, że rozwiązanie równania niejednorodnego da się przedstawić jako kombinacja rozwiązań bazowych równania jednorodnego i pewnych funkcj.
Zakładamy zatem, że rozwiązanie będzie miało postać:

$$y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t),$$

gdzie $C_1(t)$ i $C_2(t)$ są nieznanymi funkcjami, a $y_1(t), y_2(t)$ zbiorem rozwiązań fundamentalnych równania jednorodnego.

Obliczny pierwszą pochodną takiego rozwiązania:

$$y'(t) = C_1'(t)y_1(t) + C_1(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2(t) + C_2(t)y_2'(t).$$

Zauważmy, że druga pochodna zawierać będzie wyrażenia z $C_1''(t), C_2''(t)$, co nie uprości zbytnio zagadnienia. Załóżmy zatem, że:

$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0,$$

wtedy

$$y''(t) = C_1'(t)y_1'(t) + C_1(t)y_1''(t) + C_2'(t)y_2'(t) + C_2(t)y_2''(t).$$

W równaniu zatem nie pojawią się drugie pochodne poszukiwanych funkcji $C_1(t), C_2(t)$.
Po podstawieniu tak obliczonych wartości $y(t), y'(t), y''(t)$ oraz skorzystaniu z faktu, że $y_1(t), y_2(t)$ sa rozwiązanimi równania jednorodnego otrzymujemy następujacy układ równań spełniany przez $C_1'(t)$ i $C_2'(t)$:

$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0,$$

$$C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = f(t),$$

co możemy zapisać jako

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Ponieważ y_1 i y_2 są liniowo niezależne (dla każdego t), zatem

$$W[y_1(t), y_2(t)] = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

a co za tym idzie równanie (6.12) ma zawsze rozwiązanie.
Oczywiście, aby dostać rozwiązanie równania niejednorodnego, trzeba jeszcze obliczyć funkcje pierwotne dla C_1' i C_2'.

Przykład 20.
Rozpatrzmy równanie

$$y''(t) + y(t) = \sin t.$$

Wielomian charakterystyczny ma dwa pierwiastki: $\pm i$, zbiór rozwiązań fundamentalnych składa się z $\cos t$ i $\sin t$. Równanie (6.12) przybiera postać

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

mający rozwiązanie:

$$C_1'(t) = -\sin^2 t, \qquad C_2'(t) = \sin t \cos t.$$

Proste całkowanie pozwala nam na podanie jawnej postaci C_1 i C_2:

$$C_1(t) = -\int \sin^2 t\, dt = \frac{1}{4}\sin(2t) - \frac{1}{2}t + D_1,$$

$$C_2'(t) = \int \sin t \cos t\, dt = -\frac{1}{4}\cos(2t) + D_2,$$

a co za tym idzie postaci rozwiązania równania

$$y(t) = \left(\frac{1}{4}\sin(2t) - \frac{1}{2}t + D_1\right)\cos t + \left(-\frac{1}{4}\cos(2t) + D_2\right)\sin t$$

$$= D_1 \cos t + (D_2 + \frac{1}{4})\sin t - \frac{1}{2}t\cos t = E_1 \cos t + E_2 \sin t - \frac{1}{2}t \cos t.$$

Rozwiązanie zatem ma taka samą strukturę jak to wynikałoby z zastosowania poprzedniej metody: jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i pewnego rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

❏

Przykładowe zadania

Zadanie 45. Dwa rozwiązania $y_1(t)$ i $y_2(t)$ równania liniowego drugiego rzędu, spełniające
$W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$, będziemy nazywali *fundamentalnym zbiorem rozwiązań równania.*

Zadanie 46. Udowodnij, że funkcje $y_1(t) = \sqrt{t}$ i $y_2(t) = 1/t$ tworzą fundamentalny zbiór rozwiązań równania $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$. Znajdź rozwiązanie tego równania spełniające warunki początkowe: $y(1) = 2, y'(1) = 1$.

Zadanie 47. Udowodnij, że funkcje $y_1(t) = e^{-t^2/2}$ i $y_2(t) = e^{-t^2/2}\int_0^t e^{s^2/2}ds$ tworzą fundamentalny zbiór rozwiązań równania $y'' + ty' + y = 0$. Znajdź rozwiązanie tego równania spełniające warunki początkowe: $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Zadanie 48. Niech $y_1(t)$ i $y_2(t)$ będą rozwiązaniami równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, gdzie $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe w pewnym przedziale $[\alpha, \beta]$. Oznaczmy

$$W(t) = W[y_1(t), y_2(t)] = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

a. Poprzez bezpośredni rachunek sprawdź, że $W' + p(t)W = 0$.
b. Na podstawie poprzedniego punktu wywnioskuj, że dla każdych $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$ jest prawdziwa równość $W[y_1(t), y_2(t)] = W[y_1(t_0), y_2(t_0)] \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s)\, ds.\right)$
c. Udowodnij, że wyznacznik Wrońskiego $W[y_1(t), y_2(t)]$ jest albo tożsamościowo równy 0 lub nigdy nie zeruje się na przedziale $[\alpha, \beta]$.

Zadanie 49. Udowodnij, że $y(t) = t^2$ nigdy nie może być rozwiązaniem równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ dla ciągłych $p(t)$ i $q(t)$.

Zadanie 50. Załóżmy, że wyznacznik Wrońskiego rozwiązań równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ jest stały (niezależny od t) i różny od 0. Udowodnij, że $p(t) \equiv 0$.

Zadanie 51. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień:
a) $y'' + y' - 10y = 0, \quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 2;$
b) $y'' + y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2;$
c) $2y'' - y' + 3y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1;$
d) $9y'' + 6y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

Zadanie 52. Równanie postaci $t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0, \quad \alpha, \beta -$ stałe, nazywa się *równaniem Eulera*. Udowodnij, że funkcja $y(t) = t^r$ jest rozwiązaniem tego równania o ile $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$.

Zadanie 53. Znajdź rozwiązanie ogólne równania $t^2y'' + 5ty' - 5y = 0$.

Zadanie 54. Znajdź rozwiązanie zagadnienia $t^2y'' - ty' - 2y = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1$ na przedziale $0 < t < \infty$.

Zadanie 55. Sprawdź, że $W[e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t] = \beta e^{2\alpha t}$.

Zadanie 56. Załóżmy, że $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$. Udowodnij, że każde rozwiązanie równania $ay'' + by' + cy = 0$ dąży do 0 gdy $t \to \infty$.

Zadanie 57. Załóżmy, że równanie $y''+p(t)y'+q(t)y = g(t)$ ma trzy rozwiązania: $t^2, \quad t^2 + e^{2t}, \quad 1 + t^2 + 2e^{2t}$. Znajdź rozwiązanie ogólne. Znajdź to równanie.

Zadanie 58. Załóżmy, że równanie $y''+p(t)y'+q(t)y = g(t)$ ma trzy rozwiązania: $3e^t + e^{t^2}, \quad 7e^t + e^{t^2}, \quad 5e^t + e^{-t^3} + e^{t^2}$. Znajdź rozwiązanie tego równania spełniające warunki początkowe $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Zadanie 59. Stosując metodę uzmieniania stałych znajdź rozwiązanie następujących równań:
$y'' - 4y' + 4y = te^{2t}, \quad 2y'' - 3y' + y = (t^2 + 1)e^t, \quad 3y'' + 4y' + y = (\sin t)e^{-t}$.

Zadanie 60. Stosując metodę uzmieniania stałych znajdź rozwiązanie zagadnienia
$y'' - y = f(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0$.

Zadanie 61. Znajdź jedno szczególne rozwiązanie równań:
a) $y'' + 3y = t^3 - 1$, b) $y'' + 4y' + 4y = te^{\alpha t}$, c) $y'' - y = t^2e^t$,
d) $y'' + y' + y = 1 + t + t^2$ e) $y'' + 4y = t\sin 2t$,
f) $y'' - 2y' + 5y = 2(\cos^2 t)e^t$, g) $y'' + y = \cos t \cos 2t$.

Zadanie 62. Znajdź rozwiązanie szczególne równania $(1-t^2)y''-ty'+9y = 0$, jeżeli wiadomo, że ma ono rozwiązanie szczególne będące wielomianem stopnia 3. *Uwaga:* równanie Czebyszewa $(1-t^2)y''-ty'+n^2y = 0$ zawsze ma rozwiązanie szczególne będące wielomianem stopnia n.

Zadanie 63. Dla jakich wartości k i ω równanie $x'' + k^2x = \sin\omega t$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie okresowe?

Zadanie 64. Dla jakich wartości a zagadnienie $y''+ay = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, nie ma rozwiązań?

Zadanie 65. Szukamy rozwiązania szczególnego równania $y'' - 2y' + y = te^t$. Sprawdź przez bezpośrednie podstawienie, że próba szukania rozwiązania szczególnego w postaci $\psi_1(t) = (a_0 + a_1t)e^t$ lub $\psi_2(t) = (a_0 + a_1t + a_2t^2)e^t$ prowadzi do sprzeczności.
Wyjaśnij, dlaczego szukając rozwiązania w postaci $\psi_3(t) = (a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3)e^t$ można przyjąć, że $a_0 = a_1 = 0$.

Rozdział 7

Równania liniowe wyższych rzędów

Równaniem różniczkowym rzędu n-tego nazywamy równanie postaci

$$a_n(t)y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t)+\ldots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=f(t).$$

Równanie to uzupełniamy zwykle następującymi warunkami początkowymi

$$y(0)=y_0,$$

$$y'(0)=y_1,$$

$$y''(0)=y_2,$$

$$\ldots$$

$$y^{(n-1)}(0)=y_{n-1},$$

W wypadku gdy funkcja $f(t)\equiv 0$ równanie nazywamy równaniem **jednorodnym**.

Podobnie jak w przypadku równań II-go rzędu możemy sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 7.0.2 *Niech funkcje $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ będą liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania*

$$a_n(t)y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t)+\ldots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=0.$$

Wtedy rozwiązaniem ogólnym powyższego równania jest:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \ldots + C_n y_n(t),$$

gdzie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *są dowolnymi stałymi.*

Przypomnijmy, że liniowa niezależność rozwiązań oznacza, że wrońskian tych funkcji jest różny od 0, tzn.

$$|W[y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)]| = det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

7.1 Równanie jednorodne o stałych współczynnikach

Równanie jednorodne o stałych współczynnikach to równanie w którym wszystkie funkcje $a_i(t)$ nie zależą od czasu (są stałymi), tzn. ma postać

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{7.1}$$

Rozwiązań równania jednorodnego o stałych współczynnikach będziemy poszukiwali (podobnie jak było to w przypadku równań II-go rzędu) wśród funkcji postaci $y(t) = e^{rt}$, gdzie r jest pewną liczbą rzeczywistą.
Podstawiając $y(t)$ do równania (7.1) otrzymujemy

$$a_n r^n e^{rt} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rt} + a_{n-2} r^{n-2} e^{rt} + \ldots + a_1 r e^{rt} + a_0 e^{rt} = 0.$$

Liczba r spełnia więc równanie

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

Wielomian po lewej stronie równania (**równania charakterystycznego**) nazywamy **wielomianem charakterystycznym**, a jego pierwiastki **pierwiastkami wielomianu charakterystycznego**.

W przypadku gdy wszystkie pierwiastki $r_1, r_2, \dots, r_n$ są różne rozwiązanie równania jest kombinacją liniową funkcji $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t}$ zatem:

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \ldots + C_n e^{r_n t}.$$

W wypadku gdy r_i jest $k-$krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego to rozwiązaniami odpowiadającymi temu pierwiastkowi są funkcje $e^{r_i t}, t^1 e^{r_i t}, \dots, t^{k-2} e^{r_i t}, t^{k-1} e^{r_i t}$.

Kiedy zaś równanie ma pierwiastki zesplone $z_1 = a + bi$ oraz $z_2 = a - bi$, to rozwiązniami dla tych pierwiastków są funkcje $\mathrm{Re}(z_1) = e^{at}\cos(bt)$ i $\mathrm{Im}(z_1) = e^{at}\sin(bt)$.

Przykład 21.
Znajdziemy rozwiązania równania

$$y^{(vi)}(t) - 2y^{(v)}(t) + 2y^{(iii)}(t) - y'(t) = 0,$$

z warunkami początkowymi

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = -7, y^{(iv)} = -9, y^{(v)} = -21.$$

Wielomian charakterystyczny dla tego równania ma postać

$$r^6 - 2r^5 + 2r^3 - r^2 = (r-1)^3(r+1)r^2.$$

Zatem rozwiązaniami są funkcje:

$$e^t, \quad te^t, \quad t^2e^t, \quad e^{-t}, \quad 1, \quad t.$$

a rozwiązanie ogólne równania ma postać

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 te^t + C_3 t^2 e^t + C_4 e^{-t} + C_5 1 + C_6 t.$$

Uwzględniając warunki początkowe musimy zatem rozwiązać następujący układ równań

$$\begin{array}{lcr}
C_1 + C_4 + C_5 & = & 0 \\
C_1 + C_2 - C_4 + C_6 & = & 0 \\
C_1 + 2C_2 + 2C_3 + C_4 & = & 1 \\
C_1 + 3C_2 + 6C_3 - C_4 & = & -7 \\
C_1 + 4C_2 + 12C_3 + C_4 & = & -9 \\
C_1 + 5C_2 + 20C_3 - C_4 & = & -21
\end{array}$$

Rozwiązaniami są stałe

$$C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = -1, C_4 = 2, C_5 = -3, C_6 = 1,$$

a rozwiązanie ma postać

$$y(t) = e^t - t^2 e^t + 2e^{-t} - 3 + t.$$

❏

7.2 Rozwiązania niejednorodne

Twierdzenie 7.2.1 *Niech $\Psi(t)$ będzie szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego:*

$$a_n(t)y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t)+\ldots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t) = f(t). \tag{7.2}$$

Niech funkcje $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ będą zbiorem fundamentalnych rozwiązań równania jednorodnego (tzn. powyższego równania z $f(t) \equiv 0$).
Rozwiązaniem ogólnym równania (7.2) jest wtedy funkcja

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \ldots + C_n y_n(t) + \Psi(t),$$

gdzie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ są dowolnymi stałymi.

Aby znaleźć rozwiązanie szczególne $\Psi(t)$ posługujemy się teorią z równań II-go rzędu (*metodą zgadywania*).

Przykład 22.
Znaleźć rozwiązanie równania

$$y^{(iv)}(t) + 2y'''(t) - 2y''(t) + 8y(t) = 18e^t.$$

Wielomian charakterystyczny ma postać

$$r^4 + 2r^3 - 2r^2 + 8 = (r^2 - 2r + 2)(r + 2)^2,$$

jego pierwiastki to

$$r_1 = 1 - i,\ r_2 = 1 + i,\ r_{3,4} = -2,$$

a fundamentalny zbiór rozwiązań wygląda następująco

$$e^t \sin t, e^t \cos t, e^{-2t}, te^{-2t}.$$

Ponieważ prawa strona równania jest postaci e^t zatem rozwiązania szczególnego $\Psi(t)$ będziemy szukać w postaci Ce^t.
Podstawiając $\Psi(t) = Ce^t$ otrzymujemy

$$Ce^t(1 + 2 - 2 + 8) = 18e^t.$$

Zatem

$$C = 2$$

a rozwiązanie szczególne jest postaci

$$2e^t.$$

Rozwiązanie ogólne równania ma zatem postać

$$y(t) = C_1 e^t \sin t + C_2 e^t \cos t + C_3 e^{-2t} + C_4 te^{-2t} + 2e^t.$$

❏

Przykładowe zadania

Zadanie 66. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień:
a) $y^{(iv)} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -1;$
b) $y^{(v)} - 2y^{(iv)} + y''' = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y^{(iv)}(0) = -1;$
c) $y^{(iv)} + y'' = t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 1, y'''(0) = 0, \quad y^{(iv)}(0) = 1;$
d) $y''' - 2y'' + y' = e^t, \quad y(0) = 2, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y^{(iv)}(0) = 1.$

Rozdział 8

Rozwiązania w postaci szeregów potęgowych

Jedną z metod stosowaną niekiedy w rozwiązywaniu równań II-go (i wyższych) rzędów jest metoda szeregów potęgowych. Polega ona na tym, że rozwiązania szukamy w postaci szergu potegowego tzn. $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Oczywiście możliwości stosowania tej motody są ograniczone. Najlepiej sprawdza się gdy współczynniki $a_i(t)$ są wielomianami zmiennej t a równanie jest jednorodne.
Sama teoria jest prosta i najlepiej poznać ją w działaniu, a więc przykład:

Przykład 23.
Rozpatrzmy równanie

$$y'' + t^2 y + 2ty = 0,$$

z warunkami początkowymi

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Zgodnie z tym co powiedzieliśmy wcześniej $y(t)$ będziemy szukać w postaci:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Kolejne pochodne wyrażaja sie zatem wzorami;

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n,$$

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n.$$

Zwróćmy uwagę, na zamianę zmiennych jakiej dokonaliśmy, aby otrzymać wyrażenia z prawych stron. Głównym celem tej zamiany było otrzymanie wykładnika t równego n.
Podstawiając otrzymane funkcje do równania otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + t^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n + 2t\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}2a_n t^{n+1} = 0.$$

Dokonując zamiany zmiennnych w ostatnich dwóch szeregach (aby otrzymać t^n, zamiast obecnego t^{n+1}) i zapisując wszystkie wyrażenia w postaci jednego szeregu, otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}t^n + \sum_{n=1}^{\infty}2a_{n-1}t^n =$$

$$2a_2 + (6a_3 + 2a_0)t + \sum_{n=2}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_{n-1}\right)t^n = 0.$$

Z powyższej równości wynika, że

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, \\ a_3 &= -\frac{a_0}{3}, \\ a_{n+2} &= -\frac{a_{n-1}}{n+2}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Ponieważ powyższa zależność rekurencyjna definuje wartość a_n w zależności od wyrazu o indeksie mniejszym o 3, (8.1) implikuje, że wyrazy $a_2, a_5, a_8, \ldots$ są równe 0. Znając wartości a_0 i a_1 będziemy więc mogli wyznaczyć wszystkie współczynniki w szeregu definiującym $y(t)$.
Jak wyznaczyć a_0 i a_1? Jeśli warunki początkowe zadane są w tradycyjny sposób (tzn. określają wartość rozwiązania i jej pochodnej w 0), to wyznaczają one poszukiwane wielkości a_0 i a_1. Mamy bowiem:

$$y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0,$$

$$y'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} 0^n = a_1$$

(bo $0^0 = 1$). Ponieważ $a_1 = 0$ zatem z zależności rekurencyjnej ciąg $a_1, a_4, a_7, \ldots$ to ciąg 0. Pozostało nam określić ciąg wartości współczynników postaci a_{3k}, zaczynający sie od a_0. Zapisując zależność rekurencyjną w bardziej przyjaznej formie

$$a_{n+3} = -\frac{a_n}{n+3},$$

otrzymujemy następujący ciąg wartości dla naszego zagadnienia:

$$\begin{gathered} a_0, \\ a_3 = -\frac{a_0}{3}, \\ a_6 = \frac{a_0}{3 \cdot 6} = \frac{a_0}{3^2 \cdot 1 \cdot 2}, \\ a_9 = \frac{a_0}{3 \cdot 6 \cdot 9} = \frac{a_0}{3^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots \end{gathered}$$

co łatwo możemy zapisać w następującej postaci:

$$a_{3k} = (-1)^k \frac{a_0}{3^k k!}.$$

Rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia wyraża się zatem następującym wzorem

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} t^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_0}{3^k k!} t^{3k} = e^{\frac{-t^3}{3}}.$$

Z uwagi na to, ze rozwiązanie dane jest szeregiem, należy jeszcze sprawdzić, dla jakich t szereg ten jest zbieżny, czyli wyznaczyć promień zbieżności szeregu. W rozpatrywanym przykładzie promień ten równy jest, oczywiście, $+\infty$.

❏

Oczywiście nie zawsze udaje się zwinąć szereg definujący $y(t)$ do tak ładnej postaci, niemniej jednak stosowanie metody szeregów potęgowych pozwala niekiedy na znalezienie rozwiązania, kiedy inne metody zawodzą. Zauważmy, że w powyższej metodzie nie wymagamy by współczynniki były liczbami, choć, rzecz jasna, najłatwiej stosować tę metodę kiedy współczynniki, czy tez prawa strona równania, sa wielomianami, bądź funkcjami które łatwo rozwinąć w szereg.

Przykładowe zadania

Zadanie 67. Znajdź rozwiązanie ogólne równań: $y'' + ty' + y = 0, \quad y'' - ty = 0, \quad y'' - t^3 y = 0$. Zbadaj promień zbieżności otrzymanych szeregów potęgowych.

Zadanie 68. Znajdź rozwiązanie następujących zagadnień:
a) $y'' + t^2 y = 0, \qquad y(0) = 2, \;\; y'(0) = -1$
b) $t(2-t)y'' - 6(t-1)y' - 4y = 0, \qquad y(1) = 1, \;\; y'(1) = 0$

Zadanie 69. Równanie postaci $y'' - 2ty' + \lambda y = 0$, gdzie λ jest pewną stałą nazywa się równaniem Hermite'a. (a) Znajdź dwa niezależne rozwiązania równania Hermite'a. (b) Udowodnij, że dla $\lambda = 2n$ (n – liczba naturalna) równanie Hermite'a ma rozwiązanie w postaci wielomianu stopnia n

Zadanie 70. W poniższych zagadnieniach znajdź rekurencyjne wzory na współczynniki w rozwinieciu rozwiązania w szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ (PS. W przypadku problemów wyznacz tylko pięć pierwszych współczynników szeregu.)
a) $(1-t)y'' + ty' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0;$
b) $y'' + ty' + e^t y = 0, \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0;$
c) $y'' + y' + e^{-t} y = 0, \qquad y(0) = 3, \;\; y'(0) = 5;$

Rozdział 9

Transformata Laplace'a

W rozdziale tym zapoznamy z pewną metodą rozwiązywania równań różniczkowych polegającej na przekształceniu równania różniczkowego w równanie algebraiczne. Tak przekształcone równanie możemy w łatwy sposób rozwiązać, znajdując rozwiązanie które jest przetransformowanym rozwiązaniem równania różniczkowego.
Narzędziem które umożliwia dokonanie takiej transformacji jest transformata Laplace'a.

9.1 Definicje i własności

Definicja.
Niech $f(t)$ będzie funkcją określoną na $[0,+\infty)$. **Transformatą Laplace'a** *funkcji f nazywamy funkcję*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

UWAGA. Transformata Laplace'a jest operatorem liniowym.
Istotnie nietrudno stwierdzić, że

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\}(s) = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}.$$

❑

Pewnym ograniczeniem (aczkolwiek mało uciążliwym w praktyce) jest fakt, że transformata Laplace'a jest dobrze określona tylko dla funkcji o wzroście podwykładniczym, tzn. takich, dla których istnieją stałe c i M takie, że

$$|f(t)| \leqslant Me^{ct}.$$

Twierdzenie 9.1.1 *Jeśli funkcja $f(t)$ jest kawalkami ciągła i ma wzrost podwykładniczy to transformata Laplace'a istnieje dla $s > c$.*

Dowód.
Oszacujmy wartość bezwzględną transformaty Laplace'a;

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}(s)| \leqslant \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt \leqslant \int_0^\infty e^{-st}Me^{ct}\,dt \leqslant \int_0^\infty Me^{(c-s)t}\,dt.$$

Ostatnia całka jest skończona o ile $s > c$, co implikuje tezę twierdzenia.

❏

PRZYKŁAD 24.
Obliczymy transformatę Laplace'a kilku funkcji

- Niech $f(t) = 1$, wtedy

  $$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s},$$

  zatem

  $$\mathcal{L}\{1\}(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & s > 0 \\ \text{nie istnieje} & s \leqslant 0 \end{cases}$$

- Niech $f(t) = e^{at}$, wtedy

  $$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{s-a},$$

  zatem

  $$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & s > a \\ \text{nie istnieje} & s \leqslant a. \end{cases}$$

- Dla funkcji $f(t) = \cos(\alpha t)$ transformata dana jest całką $\int_0^\infty e^{-st}\cos(\alpha t)\,dt$. Możemy obliczyć tę transformatę jednak w prostszy sposób, korzystając z faktu, że $\cos\alpha t = \text{Re}\; e^{i\alpha t}$. Obliczmy zatem transformatę $e^{i\alpha t}$

  $$\mathcal{L}\{e^{i\alpha t}\}(s) = \int_0^\infty e^{(i\alpha-s)t}\,dt = \frac{1}{s-i\alpha} = \frac{s}{s^2+\alpha^2} + i\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}.$$

Biorąc część rzeczywistą otrzymanej całki otrzymujemy

$$\mathcal{L}\{\cos(\alpha t)\}(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}.$$

- Podobnie biorąc część urojoną całki $\mathcal{L}\{e^{i\alpha t}\}(s)$ możemy obliczyć transformate Laplace'a sinusa

$$\mathcal{L}\{\sin(\alpha t)\}(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}.$$

❏

Następne twierdzenie pozwoli obliczyć transformatę Laplace'a dla bardziej skomplikowanych funkcji, bez uciekania się do bezpośredniego obliczania całki.

Twierdzenie 9.1.2 *Oznaczmy przez $F(s)$ transformatę Laplace'a funkcji $f(t)$. Wtedy*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a),$$

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\}(s) = \frac{d}{ds}F(s).$$

Dowód. Dowód pierwszego faktu jest banalny

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a).$$

Aby dowieść drugiej części twierdzenia obliczmy pochodną transformaty (czyli prawą stronę równości)

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st}f(t)\right)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty (-t)e^{-st}f(t)\,dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s).$$

❏

Przykład 25.
Wiedząc, że $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ równa jest $\frac{1}{(s-1)^2}$, obliczymy funkcję $f(t)$.

Zauważmy, że $\frac{1}{(s-1)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)}\right)$. Ponieważ $\frac{1}{(s-1)} = \mathcal{L}\{e^t\}(s)$, więc, na mocy twierdzenia 9.1.2

$$\frac{1}{(s-1)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)}\right) = -\mathcal{L}\{-te^t\}(s) = \mathcal{L}\{te^t\}(s).$$

❑

Następne twierdzenie pozwoli obliczyć transformatę pochodnych, co będzie użyteczne przy stosowaniu transformaty Laplace'a do równań różniczkowych.

Twierdzenie 9.1.3 *Oznaczmy przez $F(s)$ transformatę Laplace'a funkcji $f(t)$. Wtedy*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0),$$
$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Dowód. Obliczmy

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f'(t)\,dt = e^{-st}f(t)|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-s)e^{-st}f(t)\,dt =$$

$$= -f(0) + s\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt = sF(s) - f(0).$$

Analogiczny rachunek pozwala dowieść drugiego ze stwierdzeń.

❑

9.2 Zastosowania transformaty Laplace'a

Użyteczność transformaty Laplace'a w zastosowaniu do rówań różniczkowych wynika bezpośrednio z twierdzenia 9.1.3, które pozwala zamienić pochodne funkcji na transformatę poszukiwanej funkcji.
Idea poszukiwania rozwiązania za pomocą transformaty Laplace'a polega na zamianie równania różniczkowego na rówanie algebraiczne, znalezieniu rozwiązania tegoż równania algebraicznego, a następnie odpowiedzeniu na pytanie: transformata jakiej funkcji równa jest otrzymanemu rozwiązaniu algebraicznemu. Funkcja ta będzie rozwiązaniem równania różniczkowego.

Oczywiście jako operator liniowy transformata Laplace'a jest operatorem różnowartościowym, zatem dla rozwiązania równania algebraicznego, istnieje tylko jedna funkcja której transformata jest tą funkcją.

Przykład 26.
Rozpatrzmy zagadnienie

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = e^{2t},$$

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Oznaczmy przez $Y(s)$ transformatę Laplace'a funkcji $y(t)$. Korzystając z liniowości transformaty Laplace'a

$$\mathcal{L}\{y''(t) - 2y'(t) - 3y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) - 3\mathcal{L}\{y(t)\}(s) =$$

$$= s^2Y(s) - s - 0 - 2(sY(s) - 1) - 3Y(s) = Y(s)(s^2 - 2s - 3) + 2 - s.$$

Prawa strona równa jest $\mathcal{L}\{e^2t\}(s) = \frac{1}{s-2}$. Tak więc $Y(s)$ spełnia nastepujące równanie

$$Y(s)(s^2 - 2s - 3) + 2 - s = \frac{1}{s-2}.$$

$$Y(s) = \frac{s^2 - 4s + 5}{(s-2)(s-3)(s+1)} = \frac{-\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{\frac{1}{2}}{s-3} + \frac{\frac{5}{6}}{s+1}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s) = -\frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{2t}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{3t}\}(s) + \frac{5}{6}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) =$$

$$\mathcal{L}\{-\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{5}{6}e^{-t}\}(s)$$

Zatem rozwiązaniem zagadnienia różniczkowego jest funkcja

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{5}{6}e^{-t}.$$

❑

Przykładowe zadania

Zadanie 71. Stosując wzór $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ oblicz $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$.

Zadanie 72. Uzasadnij, że każda z podanych funkcji ma wzrost podwykładniczy: t^n (dla każdego $n > 0$); $\sin at$; $e^{\sqrt{t}}$.

Zadanie 73. Uzasadnij, że nie istnieje transformata Laplace'a funkcji e^{t^2}.

Zadanie 74. Załóżmy, że $f(t)$ ma wzrost podwykładniczy. Udowodnij, że $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ dąży do 0 gdy $s \to \infty$.

Zadanie 75. Niech $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Udowodnij indukcyjnie, że
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - \frac{(d^{n-1}f)(0)}{dt^{n-1}}.$$

Zadanie 76. Stosując transformatę Laplace'a znajdź rozwiązania następujących zagadnień:
a) $y'' - 5y' + 4y = e^{2t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1;$
b) $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$
c) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{4t}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0;$

Zadanie 77. Oblicz transformaty Laplace'a funkcji: t^n, $t^n e^{at}$, $t \sin at$, $t^2 \cos at$.

Zadanie 78. Załóżmy, że $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ oraz granica $\lim_{t\searrow 0} f(t)/t$ istnieje. Udowodnij, że $\mathcal{L}\{f(t)/t\} = \int_s^\infty F(u)\,du$.
Oblicz transformaty Laplace'a funkcji: $\frac{\sin t}{t}$, $\frac{\cos at - 1}{t}$, $\frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$.

Zadanie 79. Stosując transformatę Laplace'a znajdź rozwiązania następujących zagadnień:
a) $y'' + y = \sin t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2;$
b) $y'' + y = t \sin t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2;$
c) $y'' + y' + y = 1 + e^{-t}, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -5;$

Rozdział 10

Układy równań liniowych

Bardzo często w zastosowaniach równań zwyczajnych mamy do czynienia nie z pojedyńczym równaniem, a kilkoma równaniami. Głównie wiąże się to z faktem, że pojedyńcze równanie opisuje zmiany tylko jednej badanej zmiennej. Jeśli w rozpatrywanym modelu pojawia się kilka zmiennych, naturalnym pomysłem jest zastosowanie układów równań.
Typowy układ liniowych równań różniczkowych ma postać

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2'(t) &= \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots & \\ x_n'(t) &= \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

co skrótowo możemy zapisać, jako

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

gdzie $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, a macierz A jest macierzą $n \times n$ postaci

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Oznaczenie. Pogrubiony $\mathbf{x}$ oznaczać będzie zawsze wektor (jeśli nie jest to zaznaczone, będzie to wektor n wymiarowy), o współrzędnych $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$.

Jak zobaczymy w dalszej części rozdziału układ n równań jest bardzo blisko powiązany z równaniem liniowym n-tego rzędu. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie

Twierdzenie 10.0.1 *Dowolne równanie liniowe n-tego rzędu da sie zapisać jako układ n równań liniowych pierwszego rzędu.*

Dowód. Rozpatrzmy równanie liniowe n-tego rzędu postaci

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x(t) = 0. \tag{10.1}$$

Wprowadzając nowe zmienne

$$y_1(t) = x(t), \quad y_2(t) = x'(t), \quad y_3(t) = x''(t) \quad \ldots\ y_n(t) = x^{(n-1)}(t),$$

otrzymujemy następujące zależności:

$$y_1'(t) = (x'(t) =) y_2(t), \qquad y_2'(t) = y_3(t), \quad y_3'(t) = y_4(t), \quad y_{n-1}'(t) = y_n(t).$$

Ostatnie równanie wyliczamy z (10.1)

$$y_n'(t) \left(= x^{(n)}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x^{(n-1)}(t) - \ldots - \frac{a_0}{a_n} x(t)\right) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_n(t) - \ldots - \frac{a_0}{a_n} y_1(t).$$

W ten sposób zamieniliśmy równanie (10.1) na równanie $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}.$$

❑

Implikacja w drugą stronę nie zawsze jest prawdziwa, co pokazuje następujący przykład

Przykład 27.

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2, \\ x_2' &= x_1, \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

Ponieważ tylko równania na x_1' i x_2' są ze sobą powiązane, nie da się napisać równania trzeciego rzędu. Możliwe jest tylko napisanie dwóch równań pierwszego i drugiego rzedu. Mamy bowiem:

$$x_1'' = -x_1, \quad x_3' = x_3.$$

Głównym celem tego rozdziału jest udowodnienie następującego twierdzenia

Zagadnienie

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{10.2}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $t \in (-\infty, +\infty)$*,*

oraz prezentacja sposobów wyznaczania rozwiązań tego zagadnienia.

Dowód tego twierdzenia rozpoczniemy od ogólnego faktu opisującego przestrzeń jaką tworzą rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia.

Twierdzenie 10.0.2 *Zbiór wszystkich rozwiązań równania*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \tag{10.3}$$

tworzy n*-wymiarową przestrzeń liniową.*

Dowód. Niech $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ będą dwoma dowolnymi rozwiązaniami zagadnienia (10.3). Prosty rachunek pokazuje, że ich kombinacja liniowa, tzn. $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2$ dla dowolnych stałych rzeczywistych λ_1, λ_2 również spełnia to równanie. Korzystając, z faktu, że działanie macierzy A jest odwzorowaniem liniowym, otrzymujemy

$$(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2)' = (\lambda_1\mathbf{x}_1)' + (\lambda_2\mathbf{x}_2)' = A(\lambda_1\mathbf{x}_1) + A(\lambda_2\mathbf{x}_2) = A(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2).$$

Wykazaliśmy, w ten sposób, że przestrzeń rozwiązań jest przestrzenią liniową. Pozostaje nam ustalić wymiar tej przestrzeni. W tym celu wprowadźmy funkcje ϕ_j, zdefiniowaną jako rozwiązanie zagadnienia

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T \tag{10.4}$$

gdzie 1 znajduje sie na j-tym miejscu (poza j-tym miejscem występują same 0).
Sprawdzimy teraz, czy ϕ_j są liniowo niezależnymi rozwiązaniami rozpatrywanego zagadnienia, co jest równoważne wykazaniu, że nie istnieją niezerowe współczynniki c_j takie, że

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(t) = 0.$$

Zauważmy, że powyższa suma dla $t = 0$ przybiera postać

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(0) = \sum_{j=1}^{n} c_j (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T = (c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots, c_n)^T.$$

Ostatni wektor jest wektorem zerowym wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie współczynniki c_j są równe 0, co implikuje liniową niezależność funkcji ϕ_j.
Znaleźliśmy więc n liniowo niezależnych elementów przestrzeni rozwiązań. Pozostaje nam udowodnić, że jest to baza, czyli, że każde rozwiązanie da się zapisać jako kombinacja liniowa tych elementów.
Niech $\mathbf{x}(t)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia (10.2). Twierdzimy, że funkcja postaci

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(t),$$

gdzie ϕ_j jest funkcją zdefiniowana powyżej, a c_j jest wartością występującą na j-tym miejscu warunku początkowego $\mathbf{x}_0$.
Ponieważ - jak wykazaliśmy powyżej - dowolna kombinacja liniowa funkcji ϕ_j jest rozwiązaniem równania, ostatnią rzeczą konieczną jest wykazanie, że dla $t = 0$ funkcja $\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(t)$, przyjmuje wartość $\mathbf{x}_0$. Z uwagi na to, że $\phi_j(0)$ ma niezerową wartośc tylko na j-tym miejscu, a c_j jest wartością występującą na j-tym miejscu warunku poczatkowego $\mathbf{x}_0$, dowód jest trywialny.
Zauważmy, że w ten sposób wykazaliśmy, że funkcje ϕ_j tworzą bazę, a że jest ich n, zatem i przestrzeń którą rozpinają jest n wymiarowa, co kończy dowód całego twierdzenia.

❏

Twierdzenie 10.0.3 *Niech* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *będą rozwiązaniami zagadnienia*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{10.5}$$

Wtedy następujace warunki są równoważne
a) $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ *są liniowo niezależne dla każdego* $t \in \mathbb{R}$
b) $\mathbf{x}_1(t_0), \mathbf{x}_2(t_0), \ldots, \mathbf{x}_n(t_0)$ *są liniowo niezależne.*

PRZYKŁAD 28.
Rozpatrzmy następujący przykład

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}$$

co jest równoważne układowi równań

$$\begin{aligned} x_1' &= \ x_2, \\ x_2' &= \ x_1 \quad -2x_2. \end{aligned}$$

Tak jak to robiliśmy poprzednio, możemy sprowadzić ten układ do jednego równania drugiego rzędu

$$x_1'' = -2x_1' + x_1.$$

Powyższe równanie ma rozwiązanie ogólne będące kombinacja liniową rozwiązań fundamentalnych $e^{(-1-\sqrt{2})t}$ i $e^{(-1+\sqrt{2})t}$. Ponieważ $x_2 = x_1'$, więc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{(-1-\sqrt{2})t} \\ (-1-\sqrt{2})e^{(-1-\sqrt{2})t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t} \\ (-1+\sqrt{2})e^{(-1+\sqrt{2})t} \end{pmatrix}$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{(-1-\sqrt{2})t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t}.$$

Metoda prezentowana poniżej (tzw. *metoda wartości własnych*) umożliwi nam podanie rozwiązania bez uciekania się do zamiany dwóch równań pierwszego rzędu na jedno równanie rzędu drugiego (jak w powyższym przykładzie).

10.1 Metoda wartości własnych

Motywacją do przedstawianej metody jest następująca obserwacja:

aby funkcja postaci $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ *była rozwiązaniem równania* $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}$*, konieczne jest by* λ *i* $\mathbf{v}$ *spełniały równanie*

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Obserwacja ta wynika z podstawienia funkcji o rozważanej postaci do równania. Mamy bowiem:

$$(e^{\lambda t}\mathbf{v})' = (e^{\lambda t})'\mathbf{v} = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v}$$

oraz

$$(e^{\lambda t}\mathbf{v})' = A(e^{\lambda t}\mathbf{v}) = e^{\lambda t}A\mathbf{v}.$$

Porównując prawe strony obu równań otrzymamy żądaną równość.

Definicja.
Liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ *spełniającą równość*

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

nazywamy **wartością własną** *macierzy* A*. Wektor* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy zaś* **wektorem własnym** *dla macierzy* A*.*

Obliczanie wartości i wektorów własnych jest standardową operacją wykładaną w trakcie kursu algebry, w dalszej części przywołamy zatem jedynie niezbędne fakty, definicje czy twierdzenia bez podawania dowodów.
Dla ułatwienia zakładamy, że macierz A jest macierza 2×2.

Aby obliczyć wartości i wektory własne macierzy A zauważmy, że równanie $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ możemy zapisać jako $(A - \lambda Id)\mathbf{v} = 0$. Z równości tej wynika, że macierz $(A-\lambda Id)$ powinna mieć wyznacznik zerowy, co umożliwia nam znalezienie poszukiwanych wartości własnych. Mając obliczone te wartości, wektory własne (dla każdej z wartości własnych z osobna) wyznaczamy z tej samej równości podstawiając za λ rozpatrywaną wartość.

Przypomnijmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10.1.1 *Niech* λ_j *i* $\mathbf{v}_j$*,* $j = 1, 2, \ldots, n$ *będą odpowiednio wartościami własnymi i odpowiadającymi im wektorami własnymi. Wtedy:*

- *wektory* $\mathbf{x}_j = e^{\lambda_j}\mathbf{v}_j$ *sa rozwiązaniami równania* $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}$.
- *wektory własne* $\mathbf{v}_j$ *odpowiadające różnym wartościom własnym* λ_j *są liniowo niezależne.*
- *jeżeli wektory* $\mathbf{v}_j$ *są liniowo niezależne, to niezależne są również wektory* $\mathbf{x}_j$.

Powyższe twierdzenie implikuje nastepujący wniosek.

Twierdzenie 10.1.2 *Jeżeli* $\mathbf{v}_j$ *są liniowo niezależne, to rozwiązanie ogólne równania* $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}$ *jest postaci*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j t} v_j.$$

PRZYKŁAD 29.
Przypomnijmy ostatni przykład

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} .\mathbf{x}$$

Ponieważ

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix},$$

zatem wyznacznik z tej macierzy równy jest

$$det(A - \lambda Id) = \lambda(2+\lambda) - 1 = \lambda^2 + 2\lambda - 1.$$

Wielomian ten nazywany jest **wielomianem charakterystycznym** macierzy A. Poszukiwanymi wartościami własnymi są;

$$\lambda_1 = -1-\sqrt{2}, \qquad \lambda_2 = -1+\sqrt{2}.$$

Obliczymy teraz $\mathbf{v}_1$ - wektor własny dla λ_1. Powinien on spełniać równanie:

$$(A - (-1-\sqrt{2})Id)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = 0.$$

Oczywiście, ostatnia równość równoważna jest układowi równań

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{2})v_1 + v_2 &= 0, \\ v_1 + (-1+\sqrt{2})v_2 &= 0, \end{aligned}$$

dla $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2)$. Jak nietrudno zauważyć, mnożąc pierwsze równanie przez $(\sqrt{2}-1)$ otrzymamy równanie drugie. Nie jest to nic dziwnego, gdyż - przypomnijmy - wyznacznik macierzy $A - \lambda Id$ jest równy zero, więc równania te muszą byc zależne. Możemy więc ograniczyć się do jednego z równań (powiedzmy pierwszego).
Współrzędne v_1 i v_2 spełniają zatem równość $v_2 = (-1-\sqrt{2})v_1$. Zauważmy, że chociaż wektorów własnych dla wartości własnej $-1-\sqrt{2}$ jest nieskończenie wiele, to wszystkie mają postać

$$\mathbf{v}_1 = const \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(czyli rozpinają przestrzeń jednowymiarową).
Za wektor własny $\mathbf{v}_1$ możemy przyjąć dowolny wektor z tej podprzestrzeni.

Przeprowadzając analogiczny rachunek dla λ_2 otrzymujemy

$$(A-(-1+\sqrt{2})Id)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\mathbf{v}_2 = 0,$$

co daje w rezultacie

$$\mathbf{v}_2 = const \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Zgodnie z ogólnymi rozważaniami na początku rozdziału, rozwiązanie ogólne naszego równania będzie kombinacja liniową

$$C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2,$$

czyli w rozpatrywanym przypadku daje

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{(-1-\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} + C_2 e^{(-1+\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Jest to oczywiście ta sama postać rozwiązania co otrzymana poprzednia metodą.

❏

Kiedy wartości własne są liczbami rzeczywistymi, stosowanie powyższej metody nie przysparza trudności (vide twierdzenie (10.1.2)). Kiedy wartości własne są liczbami zespolonymi nasze postępowanie oprzemy na następującej obserwacji (trywialnej dla rzeczywistych λ i $\mathbf{v}$)

UWAGA. Jeśli λ jest wartością własną macierzy A a $\mathbf{v}$ - odpowiadającym jej wektorem własnym, to $\bar{\lambda}$ - liczba sprzężona do λ oraz $\bar{\mathbf{v}}$ są również wartością własną i wektorem własnym macierzy A.

Dowód. Dowód powyższej uwagi wynika z prostej obserwacji, że

$$\overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} \quad \Leftrightarrow \quad A\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}.$$

❑

Zachodzi zatem następujące twierdzenie

Twierdzenie 10.1.3 *Jeśli* $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ *jest rozwiązaniem o wartościach zespolonych zagadnienia* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$*, to* $\mathbf{x}$ *(część rzeczywista* $\mathbf{z}$*) i* $\mathbf{y}$ *(część urojona* $\mathbf{z}$*) są rozwiązaniami* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ *o wartościach rzeczywistych.*

Dowód. Zauważmy, że

$$(\mathbf{x} + i\mathbf{y})' = \mathbf{x}' + i\mathbf{y}'$$

i równocześnie

$$A(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + iA(\mathbf{y}).$$

Ponieważ

$$\mathbf{z}'(t) = A\,\mathbf{z} \qquad (\mathbf{x} + i\mathbf{y})' = A(\mathbf{x} + i\mathbf{y}).$$

porównując części rzeczywiste i urojone prawych stron otrzymujemy

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

❑

PRZYKŁAD 30.
Rozpatrzmy następujący przykład

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Ponieważ

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

zatem wielomian charakterystyczny równy jest $\lambda^2 + 4$, a wartości własne równe są $\lambda_1 = -2i$, $\lambda_2 = 2i$ (wartości własne są liczbami zespolonymi!).

Obliczymy teraz $\mathbf{v}_1$ - wektor własny dla λ_1. Powinien on spełniać układ równań:

$$\begin{aligned} 2iv_1 + 2v_2 &= 0, \\ -2v_1 + 2iv_2 &= 0, \end{aligned}$$

dla $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2)$. Współrzędne v_1 i v_2 spełniają zatem równość $v_2 = -iv_1$. Tak więc, wektor własny dla wartości własnej $-2i$ ma postać

$$\mathbf{v}_1 = C \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\mathbf{v}_1$ jest wektorem o wartościach zespolonych.

Analogicznie dla $\lambda_2 = 2i$ drugi wektor własny $\mathbf{v}_2$ ma postać

$$\mathbf{v}_2 = C \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie (o wartościach zespolonych) ma zatem postać następującą

$$\mathbf{z}(t) = C_1 e^{-2it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + C_2 e^{2it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Korzystając z postaci trygonometrycznej, pierwszy składnik sumy możemy zapisać jako

$$C_1(\cos(-2t) + i\sin(-2t)) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= C_1 \left(\cos(-2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(-2t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + iC_1 \left(\cos(-2t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin(-2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} + iC_1 \begin{pmatrix} \sin(-2t) \\ -\cos(-2t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} + iC_1 \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Analogicznie, drugi składnik zapisujemy jako

$$C_2(\cos(2t) + i\sin(2t))\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= C_2\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + iC_2\begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że korzystając z twierdzenia 10.1.3 pierwsze (zespolone) rozwiązanie fundamentalne da nam dwa rozwiązania rzeczywiste:

$$\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Jak nietrudno sprawdzić, drugie rozwiązanie zespolone da nam te same (z dokładością do stałej, w tym przypadku równej -1) rozwiązania rzeczywiste.

Rozwiązanie ogólne rozpatrywanego równania dane jest więc formułą

$$\mathbf{x}(t) = C_1\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

❏

Przypadek, kiedy wielomian charakterystyczny ma dwa takie same pierwiastki (wyróżnik kwadratowy jest równy zero), wymaga szczególnego potraktowania, które pozwoli nam uogólnić poprzednie rozważania.
Przypomnijmy, że podobna sytuacja miała miejsce podczas rozpatrywania równan liniowych drugiego rzędu. Gdy wielomian charakterystyczny miał podwójny pierwiastek r_0, oprócz rozwiązania $e^{r_0 t}$ dodawaliśmy, w nieco sztuczny sposób, rozwiązanie postaci $te^{r_0 t}$.
Poniżej zobaczymy skąd bierze się to drugie rozwiązanie.

W tym celu wprowadźmy następująca definicję

Definicja.
Postacią wykładnicza macierzy *macierzy A nazywamy macierz, w postaci szeregu nieskończonego*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

Powyższa definicja pozwala sformułować nastepujące twierdzenie:

Twierdzenie 10.1.4 *Rozwiązanie zagadnienia*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

dane jest wzorem

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$(e^{tA}\mathbf{x}_0)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}A = A\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\right) = A(e^{tA}\mathbf{x}_0).$$

Ponadto dla $t = 0$ spełniony jest warunek początkowy

$$e^{tA}\mathbf{x}_0|_{t=0} = \left(Id + \frac{(tA)}{1!} + \frac{(tA)^2}{2!} + \dots\right)\mathbf{x}_0|_{t=0} = Id\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0.$$

❑

Bezpośrednie obliczenie e^{tA} z definicji nie jest z reguły, rzeczą banalną. Jedynie w kilku przypadkach, jak np. macierzy diagonalnych czy też nilpotentnych (tzn. takich których pewna potęga daje macierz o zerowych współczynnikach) daje się łatwo zastosować wzór z definicji.

Przypomnijmy kilka faktów, użytecznych w tej teorii:

- Jeśli dla macierzy A i B zachodzi $AB = BA$, to $e^{A+B} = e^A e^B$.
- $e^{\lambda Idt}\mathbf{v} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k (Id)^k}{k!}\right)\mathbf{v} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) Id\mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{v}$.
- jeśli istnieje $m \neq 0$ takie, że $B^m = 0$, to dla każdego $l \geqslant 1$ zachodzi $B^{m+l} = 0$.

Wróćmy do rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia. Zapiszmy $e^{tA}\mathbf{v}$ w następującej postaci

$$e^{tA}\mathbf{v} = e^{t\lambda Id \,+\, t(A-\lambda Id)}\mathbf{v} = e^{t\lambda Id}e^{t(A-\lambda Id)}\mathbf{v} = e^{t\lambda}Ide^{t(A-\lambda Id)}\mathbf{v} = e^{t\lambda}e^{t(A-\lambda Id)}\mathbf{v}.$$

Druga równość jest prawdziwa na mocy pierwszego z przypomnianych faktów, gdyż oczywiście $\lambda Id\ (A-\lambda Id) = (A-\lambda Id)\ \lambda Id$.

Zauważmy, że gdy macierz A ma tylko rzeczywiste (różne) wartości własne λ_j to biorąc $\lambda = \lambda_j$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_j$ ($\mathbf{v}_j$ - odpowiedni wektor własny) postać rozwiązania przyjmie następująca formę:

$$e^{tA}\mathbf{v}_j = e^{t\lambda_j Id \,+\, t(A-\lambda_j Id)}\mathbf{v}_j = e^{t\lambda_j}e^{t(A-\lambda_j Id)}\mathbf{v}_j = e^{t\lambda_j}\mathbf{v}_j$$

co zgadza sie z dotychczas używaną postacią rozwiązania. Ostatnia równość wynika z definicji wartości własnej i wektora własnego: $A\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j$, co implikuje $e^{t(A-\lambda_j Id)}\mathbf{v}_j = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t(A-\lambda_j Id))^k}{k!}\right)\mathbf{v}_j = \left(Id + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t(A-\lambda_j Id))^k}{k!}\right)\mathbf{v}_j = Id\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j$.

Jak juz stwierdziliśmy to wcześniej, w przypadku zespolonych wartości własnych, rozwiązaniami rzeczywistymi są częsci rzeczywiste i urojone tychże rozwiązań.

Ostatnim przypadkiem, który musimy rozpatrzeć, jest przypadek wielokrotnych wartości własnych.

Oczywiście w przypadku, kiedy dla jednej wartości własnej λ_0 (wielokrotnej) potrafimy znaleźć więcej <u>liniowo niezależnych</u> wektorów własnych (np. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$), to $e^{\lambda_0 t}\mathbf{v}_1, e^{\lambda_0 t}\mathbf{v}_2$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania.

Przykład 31.
Rozpatrzmy równanie

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Macierz A ma tylko jedna wartość własną (podwójną) równą 3. Zauważmy, że

$$(A-3Id)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v} = 0,$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań. W istocie, dowolny wektor (v_1, v_2) spełnia to równanie. Możemy więc wybrać dwa liniowo niezależne wektory

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

co daje nam rozwiązanie rozważanego równania:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

❏

Jak policzyć rozwiązanie równanie, kiedy nie da się znaleźć więcej liniowo niezależnych wektorów własnych?

Przyjmijmy, że mamy macierz 2×2 z podwójną wartością własną λ_1 dla której potrafimy znaleźć tylko jeden wektor własny $\mathbf{v}_1$.
Oznaczmy przez $\mathbf{v}_2$ wektor będący rozwiązaniem równania

$$(A - \lambda_1 Id)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \tag{10.6}$$

a ponadto liniowo niezależny z wektorem $\mathbf{v}_1$. Obliczmy $e^{tA}\mathbf{v}_2$. Mamy

$$e^{tA}\mathbf{v}_2 = e^{t\lambda_1 Id \ + \ t(A-\lambda_1 Id)}\mathbf{v}_2 = e^{t\lambda_1} e^{t(A-\lambda_1 Id)}\mathbf{v}_2 = e^{t\lambda_1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t(A-\lambda_1 Id))^k}{k!} \right) \mathbf{v}_2 =$$

$$= e^{t\lambda_1} \left(\mathbf{v}_2 + (t(A-\lambda_1 Id))\mathbf{v}_2 + \frac{(t(A-\lambda_1 Id))^2}{2!}\mathbf{v}_2 + \frac{(t(A-\lambda_1 Id))^3}{3!}\mathbf{v}_2 \right)$$

$$= e^{t\lambda_1} \left(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1 \right),$$

gdyż z (10.6) wynika, że

$$(A - \lambda_1 Id)^2 \mathbf{v}_2 = (A - \lambda_1 Id)\mathbf{v}_1 = 0, \quad \text{ogólnie } (A - \lambda_1 Id)^k \mathbf{v}_2 = 0, \quad \forall k \geqslant 2.$$

Pozostaje sprawdzić, czy rozwiązania $e^{t\lambda_1}\mathbf{v}_1$ i $e^{t\lambda_1}(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1)$ są liniowo niezależne. Ale dla $t = 0$ rozwiązania te przyjmują wartość $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$, które z defincji $\mathbf{v}_2$ sa liniowo niezależne.

Przykład 32.
Rozpatrzmy równanie

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Liczba 2 jest podwójną wartością własną. Pierwszy wektor własny obliczamy z równania

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0,$$

co implikuje $v_2 = 0$ i postać pierwszego wektora własnego

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zgodnie z procedura zaproponowaną powyżej drugi wektor własny spełnia równanie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

z czego wnioskujemy, że $w_2 = 1$. Pamiętając, że wektor $\mathbf{v}_2$ powinnien być liniowo niezależny z wektorem $\mathbf{v}_1$, wybieramy

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne równania ma więc postać

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

❏

10.2 Macierz fundamentalna

Poniżej poznamy jeszcze jedną metodę wyznaczania e^{tA} oparta na znajomości rozwiazań równania $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Definicja.
Niech $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ *będą liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$*.* **Macierzą fundamentalną** *dla równania* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ *nazywamy macierz*

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t))$$

gdzie kolejne kolumny tej macierzy są rozwiązaniami $\mathbf{x}_j(t)$*.*

Macierz fundametalną użyjemy do obliczenia e^{tA}. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie

Niech $\mathbf{X}(t)$ *będzie macierzą fundamentalną dla równania* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$*. Wtedy*

$$e^{tA} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0).$$

Dowód tego twierdzenia rozbijemy na trzy lematy: w pierwszym pokażemy, że macierz fundamentalna spełnia rozważane równanie różniczkowe, w drugim pokażemy, że macierz e^{tA} jest macierzą fundamentalną, by w ostatnim wykazać, że obie wspomniane macierze są tożsame z dokładnościa do przemnożenia przez macierz o stałych współczynnikach.

Lemat. *Macierz* $\mathbf{X}(t)$ *jest macierzą fundamentalną układu* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$*, wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t), \qquad \det \mathbf{X} \neq 0.$$

Dowód. Najpierw udowodnimy implikację w prawą stronę. Jeśli $\mathbf{X}(t)$ jest macierzą fundamentalną, to każda z jej kolumn (będąca rozwiązaniem równania $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$) równiez musi spełniać to równanie. Zatem

$$\mathbf{X}'(t) = (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t))' = (\mathbf{x}_1'(t), \mathbf{x}_2'(t), \ldots, \mathbf{x}_n'(t)) =$$

$$= (A\mathbf{x}_1(t), A\mathbf{x}_2(t), \ldots, A\mathbf{x}_n(t)) = A(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)) = A\mathbf{X}(t).$$

Ponieważ rozwiązania sa liniowo niezależne, więc

$$\det \mathbf{X}(t) = \det \mathbf{X}(0) = \det(\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \ldots, \mathbf{x}_n(0)) \neq 0.$$

Implikacja w drugą stronę również nie jest trudna. jeśli bowiem $\mathbf{X}(t)$ spełnia równanie, to (pisząc podobne obliczenia jak powyżej), każda z kolumn również musi spełniać to równanie. Zatem mamy n rozwiązań równania $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Ponieważ dla $t = 0$ $\det \mathbf{X}(0) \neq 0$ zatem są to rozwiązania liniowo niezależne dla $t = 0$ a więc i dla dowolnego t.

❑

Lemat. *Macierz e^{tA} jest macierzą fundamentalną układu $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.*

Dowód. W dowodzie posłużymy sie poprzednim lematem. Zauważmy, że

$$(e^{tA})' = (Id + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \ldots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \ldots)' =$$

$$= (A + \frac{1}{2}tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^n + \ldots) =$$

$$= A(Id + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \ldots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \ldots) = Ae^{tA}.$$

Ponadto, z uwagi na nierówność $\det e^{0A} = \det Id \neq 0$ łatwo wykazać, że

$$\det e^{tA} \neq 0, \quad \text{dla każdego } t \geqslant 0.$$

Zatem na mocy poprzedniego lematu e^{tA} jest macierzą fudamentalną układu $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

❑

Lemat. *Niech macierze $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ będą macierzami fundamentalnymi dla układu $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Istnieje wtedy macierz C o stałych współczynnikach, taka, że*

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)C.$$

Dowód. Jeśli macierze $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ sa macierzami fundamentalnymi, to każda z nich składa się z kolumn które są rozwiązaniami równania $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Mamy zatem n liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{x}_j, j = 1, 2, \ldots, n$ i drugi komplet $\mathbf{y}_j, j = 1, 2, \ldots, n$ rozwiązań, pochodzący z macierzy fundamentalnej $\mathbf{Y}(t)$. Ponieważ wszystkie te wektory są rozwiązaniami tego samego równania i jest ich $2n$, zatem nie mogą być liniowo niezależne. Możemy zatem wyrazić każdy z wektorów $\mathbf{y}_j$ jako kombinację liniową wektorów $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Mamy więc następujące równości

$$\mathbf{y}_1(t) = c_1^1\mathbf{x}_1(t) + c_1^2\mathbf{x}_2(t) + \ldots + c_1^n\mathbf{x}_n(t),$$

$$\mathbf{y}_2(t) = c_2^1\mathbf{x}_1(t) + c_2^2\mathbf{x}_2(t) + \ldots + c_2^n\mathbf{x}_n(t),$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{y}_n(t) = c_n^1\mathbf{x}_1(t) + c_n^2\mathbf{x}_2(t) + \ldots + c_n^n\mathbf{x}_n(t),$$

co możemy skrótowo zapisać jako

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)C,$$

gdzie współczynniki macierzy C pochodzą z powyższych równań.

❏

Twierdzenie 10.2.1 *Niech $\mathbf{X}(t)$ będzie macierzą fundamentalną dla równania $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Wtedy*

$$e^{tA} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)$$

Dowód. Ponieważ $\mathbf{X}(t)$ i e^{tA} to macierze fundamentalne, z ostatniego lematu wynika, że istnieje macierz C o stałych współczynnikach, taka, że

$$e^{tA} = \mathbf{X}(t)C.$$

Ponieważ równośc ta jest prawdziwa dla każdego t, przypadek $t = 0$ pozwoli nam obliczyć współczynniki tej macierzy. Dla $t = 0$ mamy bowiem

$$Id = \mathbf{X}(0)C \Longrightarrow C = \mathbf{X}^{-1}(0),$$

co kończy dowód twierdzenia.

❏

10.3 Niejednorodne układy równań liniowych

Przez **niejednorodny układ równań liniowych** rozumieć będziemy równanie (a właściwie układ równań) typu

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{10.7}$$

gdzie $\mathbf{f}(t)$ jest funkcją o wartościach wektorowych, tzn. $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(t) \\ \mathbf{f}_2(t) \\ \dots \\ \mathbf{f}_n(t) \end{pmatrix}$, a każda z funkcji $\mathbf{f}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zasada Duhamela mówi, że rozwiązanie zagadnienia (10.7) dane jest wzorem

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{tA}e^{-sA}\mathbf{f}(s)\,ds. \tag{10.8}$$

gdzie e^{tA} jest macierzą fundamentalną dla zagadnienia jednorodnego, a $\mathbf{x}_0$ jest warunkiem początkowym (dowód tego stwierdzenia można znaleźć w [6]).

Przykład 33.
Rozpatrzmy zagadnienie

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pierwszym krokiem będzie znalezienie wartości własnych dla macierzy A. Ponieważ macierz jest macierzą górnotrójkątną, łatwo sprawdzić, że wartości własne to 1 i 2 a wektory własne to (odpowiednio) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Zatem macierz fundamentalna to macierz

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Aby obliczyć e^{tA} potrzebujemy jeszcze macierzy odwrotnej do macierzy $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ponieważ $\mathbf{X}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zatem

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Wróćmy do wzoru (10.8). Podstawiając obliczone wartości dla e^{tA} otrzymujemy następującą postać rozwiązania

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t}-e^t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s} & e^{2(t-s)}-e^{t-s} \\ 0 & e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3s} \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t+2s} \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t e^{t+2s}\, ds \\ \int_0^t 0\, ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \frac{1}{2}(e^{2t}-1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{3t}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Przykładowe zadania

Zadanie 80. Znajdź rozwiązania następujących układów sprowadzając je do równań drugiego rzędu:
a) $x' = x + y, \quad y' = 4x + y, \qquad x(0) = 2, \quad y(0) = 3;$
b) $x' = 3x - 2y, \quad y' = 4x - y, \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 5;$
c) $x' = y + f_1(t), \quad y' = -x + f_2(t), \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 0;$ (f_1 i f_2 to dane funkcje).

Zadanie 81. Zapisz w postaci układu równań pierwszego rzędu następujące równania:
$y''' + (y')^2 = 0, \quad y''' + \cos y = e^t, \quad y^{(iv)} + y'' = 1.$

Zadanie 82. Zapisz w postaci wektorowej $\bar{x}' = A\bar{x}$, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$ następujące układy
a) $x_1' = 3x_1 - 7x_2, \quad x_2' = 4x_1, \qquad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1;$
b) $x_1' = x_1 + x_2 - x_3, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = -x_2, \qquad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 3$ $x_3(0) = 4;$

Zadanie 83. Znajdź bazę rozwiązań następujących układów równań liniowych sprowadzając je do jednego równania wyższego rzędu

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\bar{x},\ \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\bar{x},\ \bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\bar{x},\ \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\bar{x}.$$

Zadanie 84. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, skonstruuj rozwiązanie ogólne:

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

Zadanie 85. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, rozwiąż następujące zagadnienia początkowe

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 86. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, skonstruuj rozwiązanie ogólne:

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

Zadanie 87. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, rozwiąż następujące zagadnienia początkowe

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \ \bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}, \ \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 88. Wyznacz wszystkie wektory $\bar{x}^0$ takie, że rozwiązanie zagadnienia

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}^0 \qquad \text{jest okresową funkcją } t.$$

Zadanie 89. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}, \ \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 90. Niech $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Udwodnij, że $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$.

Zadanie 91. Niech $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Udwodnij, że $e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 92. Oblicz e^{At} dla macierzy A równej $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Zadanie 93. Niech $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Uzasadnij, że $A^2 = -I$ i wykorzystując ten fakt udowodnij, że $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Zadanie 94. Oblicz e^{At} dla macierzy A równej $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 95. Znajdź macierz A, dla której $e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}$.

Zadanie 96. Załóżmy, że $\bar{\phi}_j(t)$ $(j = 1, 2, ..., n)$ są rozwiązaniami zagadnienia $\bar{x}' = A\bar{x}$, $\bar{x}(0) = \bar{e}^i$ ($\bar{e}^i = (0, ..., 1, ...0)$ – jedynka na i-tym miejscu). Udowodnij, że $e^{At} = (\bar{\phi}_1(t), ..., \bar{\phi}_n(t))$.

Zadanie 97. Znadź rozwiązania następujących zagadnień:

a) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 4e^t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

b) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \qquad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

c) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

Rozdział 11

Wstęp do układów dynamicznych

W poprzednim rozdziale rozpatrywaliśmy równania postaci

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, t),$$

gdzie $f(\mathbf{x}, t)$ było odwozrowaniem liniowym reprezentowanym przez macierz o stałych współczynnikach. Taki dobór funkcji f pozwalał na podanie rozwiązania wzorem. Co jednak zrobić kiedy f nie jest funkcja liniową? Zwykle, niestety, nie jesteśmy w stanie podać rozwiązania wzorem. Nie stoimy jednak na straconej pozycji, bo możemy skupić sie na jakościowym zachowaniu rozwiązania. Jakościowa teoria układów dynamicznych skupia się nie na wyznaczaniu dokładnych wartości rozwiązania a na scharakteryzowaniu zachowania rozwiązania wokół pewnych punktów (zwanych punktami krytycznymi).
Pomysł opiera się na wyznaczeniu punktów w których rozwiązanie jest stałe, zamianie oryginalnego zagadnienie na powiązane z nim zagadnienie liniowe (czyli linearyzacji), a nastepnie obserwacji, że w otoczeniu tego punktu zachowanie oryginalnego rozwiązania podobne jest do zachowania zagadnienia liniowego.

Dla uproszczenie, w niniejszym rozdziale zakładamy, że równanie jest równaniem autonomicznym, tzn. funkcja f zależy tylko pd $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}).$$

Definicja.
Punktem krytycznym *równania autonomicznego* $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ *nazywamy punkt* $\mathbf{x}^*$ *taki, że* $f(\mathbf{x}^*) = 0$.

Uwaga. Punkty krytyczne sa interesujące głównie dlatego, że funkcja stała $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ jest rozwiązaniem (niezależnym od czasu) równania autonomicznego $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$.

Uwaga. Rozpatrując zagadnienie liniowe, tzn. takie, gdy $f(\mathbf{x})$ jest reprezentowana przez macierz o stałych współczynnikach, łatwo zauważyć, że jedynym punktem krytycznym jest punkt $\mathbf{x}^* = 0$.

11.1 Zagadnienie liniowe

W rozdziale tym przypomnimy pokrótce klasyfikację punktów krytycznych. Dla uproszczenia ograniczymy się do macierzy 2×2. Rozpatrywać zatem będziemy równanie

$$x' = Ax,$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Na kursie algebry standardowo wykładany jest fakt, że dla dowolnej macierzy A istnieje nieosobliwe przekształcenie linowe zadane macierzą P (wymiaru 2×2), taką, że

$$P^{-1}AP = J,$$

gdzie J jest macierzą w kanonicznej postaci z klatkami Jordana.
Poniższą klasyfikacje przeprowadzimy przy założeniu, że macierz A dana jest już w postaci klatkowej Jordana.

Dla każdej z możliwych klatek Jordana narysujemy wykres przedstawiający rozwiązania $(x(t), y(t))$, zwany **portretem fazowym**.

Na początek załóżmy, że $\det A \neq 0$.

Wchodzą wtedy w grę trzy przypadki, w zależności od znaku Δ obliczonej dla wielomianu charakterystycznego.

- $\Delta > 0$

  Macierz A w kanoniczej postaci klatkowej Jordana wygląda następująco:

  $$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

  gdzie λ_1 i λ_2 są różnymi liczbami rzeczywistymi.

  Układ ten reprezentuje układ równan

  $$x' = \lambda_1 x, \qquad y' = \lambda_2 y,$$

  mający następujące rozwiązanie

  $$x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0, \qquad y(t) = e^{\lambda_2 t} y_0.$$

  Wyznaczając e^t z równania na $x(t)$ otrzymujemy

  $$y(t) = e^{\lambda_2 t} y_0 = (e^{\lambda_1 t})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} y_0 = x(t)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} y_0 x_0^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

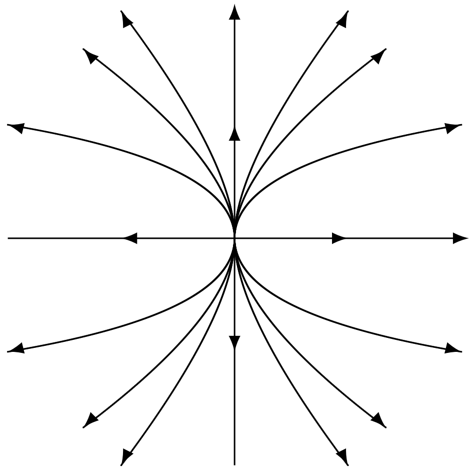
  Zatem x i y powiązane są w sposób następujący:

  $$y = Cx^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

  Sklasyfikujemy teraz punkty krytyczne w zależności od znaku λ_1 i λ_2.

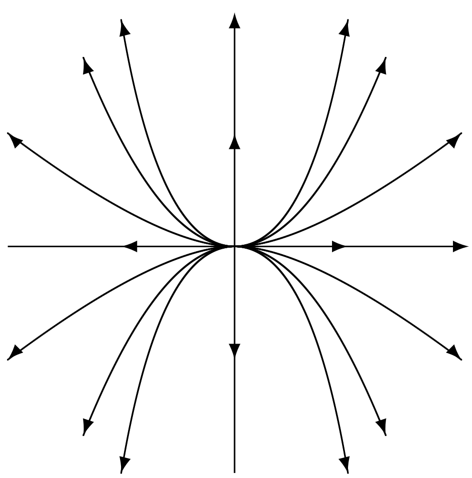
  - $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

    Punkt krytyczny o takich wartościach własnych nazywamy **węzłem niestabilnym**. Nazwa wynika z faktu, ze przy $t \to +\infty$ rozwiązania $x(t)$, $y(t)$ oddalają się od punktu $(0,0)$. Portret fazowy wygląda następująco:



- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
  Punkt krytyczny o takich wartościach własnych to **węzłem stabilnym**. Stabilność oznacza, że dla $t \to +\infty$ rozwiązania $x(t)$, $y(t)$ zbiegają do punktu $(0,0)$. Portret fazowy różni sie od portretu fazowego węzła niestabilnego jedynie kierunkiem strzałek:

- $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$
  Podobnie jak w pierwszym przypadku, jest to **węzeł niestabilny**. jedyna różnica polega na tym, że y wyraża się za pomocą x jak x^α dla $\alpha > 1$ (w pierwszym przypadku α było z przedziału $(0,1)$). Portret fazowy wygląda nastepująco:

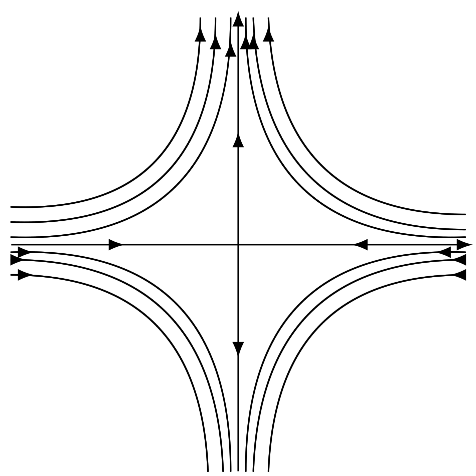


- $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

  W tym przypadku, jest to znów **węzeł stabilny**, a portret fazowy przypomina przypadek poprzedni, z wyjątkiem kierunku strzałek, które skierowane są przeciwnie niż w rysunku powyżej.

- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

  Kiedy wartości własne są przeciwnych znaków, wartości $x(t)$ i $y(t)$ nie mogą równocześnie dążyć do $+\infty$, bądź do punktu $(0, 0)$. Punkt taki nazywamy **siodłem**, a portret fazowy obrazuje sytuacje kiedy jedna ze zmiennych x bądź y dąży do 0, podczas gdy druga dąży do $+\infty$.

- $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

  Jak już nadmieniliśmy powyżej, ten przypadek punktu krytycznego to również **siodło**, z tym, że strzałki skierowane są przeciwnie niż na rysunku powyżej.

• $\Delta = 0$

W tym przypadku, macierz A ma jedną, podwójna wartość własną λ_0. W zależności od tego, czy dla λ_0 istnieje jeden, czy też dwa wektory własne, klatka Jordana wygląda w różny sposób.

– dwa liniowo niezależne wektory własne (czyli przypadek, gdy rząd macierzy $A - \lambda Id$ wynosi 0).

Macierz A (a właściwie odpowiadająca jej klatka Jordana) ma postać

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

co oznacza, że $x(t)$ i $y(t)$ spełaniają następujący układ równań różniczkowych

$$x' = \lambda_0 x, \qquad y' = \lambda_0 y,$$

mający rozwiązania postaci

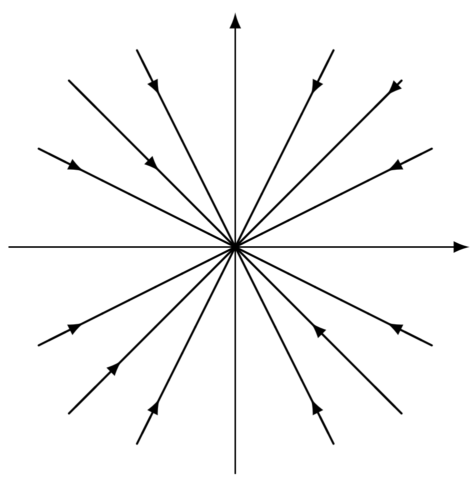
$$x(t) = e^{\lambda_0 t} x_0, \qquad y(t) = e^{\lambda_0 t} y_0.$$

Wyznaczając $e^{\lambda_0 t}$ z równania na $x(t)$ otrzymujemy następującą relację łączącą x i y

$$y(t) = e^{\lambda_0 t} y_0 = x(t) \frac{y_0}{x_0}.$$

Zatem portret fazowy będzie składał się z prostych przechodzących przez punkt $(0, 0)$.

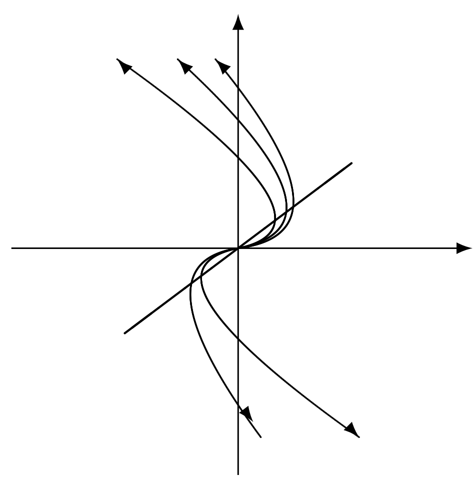
∗ gdy $\lambda_0 < 0$ mamy do czynienia z **węzłem gwiaździstym stabilnym** o następującym portrecie fazowym



* gdy $\lambda_0 > 0$ punkt krytyczny jest **węzłem gwiaździstym niestabilnym**, z portret fazowym takim samym jak poprzednio, tylko strzałkami skierowanymi od środka układu.

– jeden wektor własny (czyli przypadek, gdy rząd macierzy $A - \lambda Id$ równy jest 1).
Macierz A ma wtedy postać
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$
co odpowiada układowi
$$x' = \lambda_0 x + y, \qquad y' = \lambda_0 y.$$
Wyznaczając rozwiązanie $y(t)$
$$y(t) = e^{\lambda_0 t} y_0$$
i podstawiając do pierwszego równania otrzymujemy równanie liniowe niejednorodne
$$x' = \lambda_0 x + e^{\lambda_0 t} y_0,$$
które ma rozwiązanie postaci
$$x(t) = y(t) \left(\frac{x_0}{y_0} + t \right).$$

* gdy $\lambda_0 > 0$ mówimy o **węźle zdegenerowanym niestabilnym**, z następującym portretem fazowym



Istotną cechą powyższego portretu fazowego jest prosta, na której leżą maksima i minima funkcji $x(t)$. Zauważmy bowiem, że spełaniać muszą warunek $x'(t) = 0$ co jest równoważne warunkowi $y = -\lambda_0 x$, który wyznacza tę prostą.

* gdy $\lambda_0 < 0$ punkt krytyczny jest **węzłem zdegenerowanym stabilnym**.
  Tak jak do tej pory, portret fazowy węzła zdegenerowanego stabilnego różni sie od niestabilnego jedynie kierunkiem strzałek.

- $\Delta < 0$

  W tym przypadku, wartości własne są liczbami zespolonymi postaci $\alpha \pm i\beta$, a odpowiadająca im klatka Jordana wygląda następująco

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

co odpowiada układowi równań

$$x' = \alpha x - \beta y,$$
$$y' = \beta x + \alpha y.$$

Wprowadzając nowe współrzędne biegunowe r i θ

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \qquad y(r,\theta) = r\sin\theta$$

otrzymujemy następujący układ równań

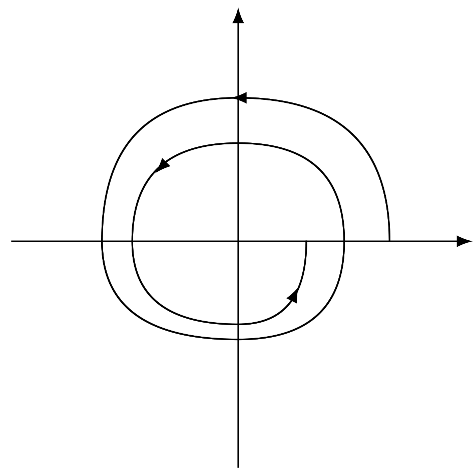
$$r'(t) = \alpha r, \qquad \theta'(t) = \beta.$$

mający rozwiązanie postaci

$$r(t) = e^{\alpha t} r_0, \quad \theta(t) = \beta t + \theta_0.$$

Jak łatwo stwierdzić, współczynnik α odpowiada za zbliżanie bądź oddalanie od środka układu, natomiast β za kierunek obrotu.

  – $\alpha > 0, \beta > 0$
    Portret fazowy o takich współczynnikach nazywamy **ogniskiem niestabilnym**, o następującym portrecie fazowym

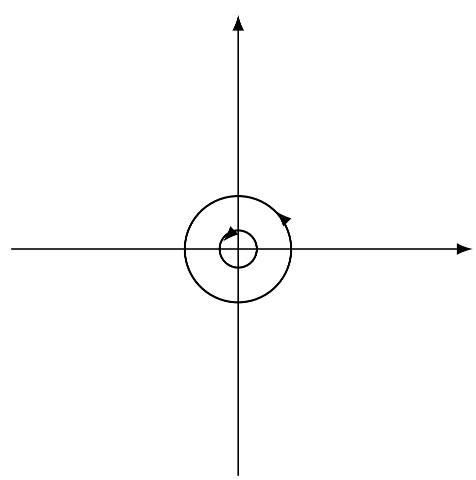


- $\alpha > 0, \beta < 0$

  W tym przypadku **ogniska niestabilnego** trajektorie rozwiązania krążą zgodnie z ruchem wskazówk zegara.

- $\alpha = 0, \beta > 0$

  Ponieważ w tym przypadku trajektorie nie zmieniają odległości od środka układu, taki punkt fazowy nazywamy **środkiem**. Trajektorie (okresowe, bo zakreślające krzywą zamkniętą - okrąg), krążą przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.



- $\alpha = 0, \beta < 0$

  Portret fazowy dla tego **środka** jest analogiczny, z tym, że trajektorie krążą w przeciwną stronę.

Do tej pory zakładaliśmy, że macierz A ma niezerowy wyznacznik. Poniżej przedstawimy klasyfikację punktów krytycznych gdy $\det A = 0$. Oznacza to, że przynajmniej jedna z wartości własnych jest równa 0.

- $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0$

  W tym przypadku postać klatkowa Jordana macierzy A to

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

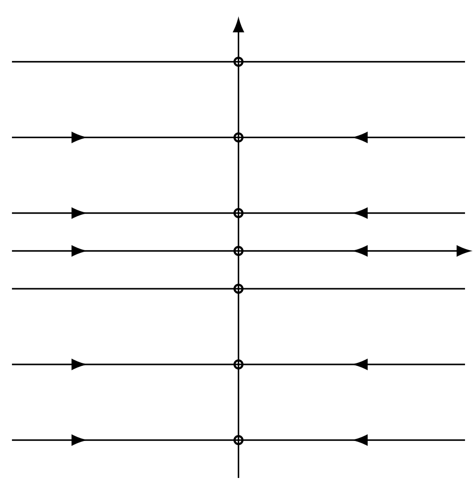
  co odpowiada układowi

$$x' = \lambda_1 x, \qquad y' = 0,$$

  mającemu rozwiązanie postaci:

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0, \qquad y(t) = y_0.$$

  Zauważmy, że wszystkie punkty postaci $(0, y)$ są punktami krytycznymi, a dowolna trajektoria nie zmienia swojej drugiej współrzędnej. W zależności od znaku λ_1 trajektorie będą zbiegały do osi OY, jak w portrecie poniżej



  bądź oddalały się od tej osi, gdy $\lambda_1 > 0$.

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

  W tym przypadku mamy dwie możliwości, bądź macierz A jest macierzą zerową (co nie jest zbyt interesujące, gdyx wszystkie punkty płaszczyzny są punktami krytycznymi), bądź A ma postać

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

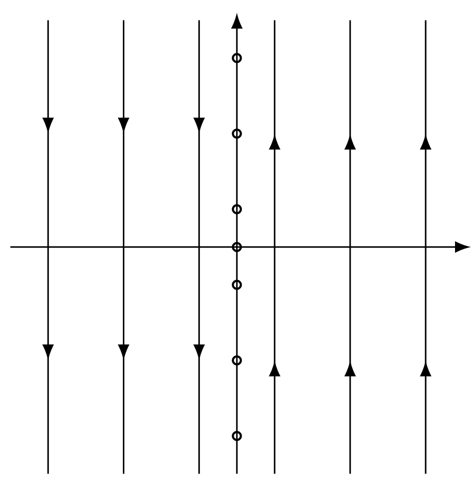
  co odpowiada układowi równań

$$x' = 0, \qquad y' = x,$$

  z rozwiązaniami postaci

$$x(t) = x_0, \qquad y(t) = tx_0 + y_0.$$

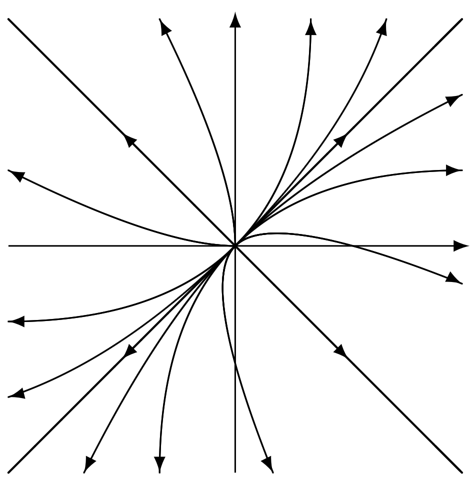
  zauważmy, że portret fazowy składa się z punktów krytycznych (znajdujących sie na osi OY), oraz trajektorii będących liniami prostymi, przy czym w zależności od x_0 druga składowa trajektorii dąży do $+\infty$ (dla $x_0 > 0$), bądź do $-\infty$ (dla $x_0 > 0$).



Przykład 34.
Rozpatrzmy równanie

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Wielomian charakterystyczny ma postać $\lambda^2 - 8\lambda + 12$, z czego wynika, że wartości własne macierzy A to $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 6$.
Wektorem własnym dla wartości własnej λ_1 jest wektor $\mathbf{v}_1 = [1, 1]$. Dla drugiej wartości własnej λ_2 jest wektor $\mathbf{v}_2 = [1, -1]$.
Ponieważ obie wartości własne są dodatnie, zatem punkt $(0, 0)$ jest węzłem niestabilnym.
Aby narysować portret fazowy możemy posłużyć się, wspomnianym wcześniej, wzorem $A = PJP^{-1}$, gdzie macierz P sprowadza macierz A do macierzy Jordanowskiej.
Zamiast jednak obliczać macierz P, wystarczy zauważyć, że osiom OX i OY (czyli osiom odpowiadającym osiom wektorów własnych $[0, 1]$ i $[1, 0]$ macierzy Jordana) odpowiadają osie $y = \pm x$ wyznaczone są przez wektory własne $[1, 1]$ i $[1, -1]$. Zatem szkic portretu fazowego wygląda nastepująco



❏

11.2 Linearyzacja zagadnienia

Jak już anonsowaliśmy wcześniej, w tej części pokażemy kiedy i w jaki sposób możemy przybliżyć portret fazowy układu nieliniowego. Pierwszym krokiem jest wyznaczenie punktów krytycznych i zastąpienie oryginalnego układu układem liniowym. Jak to zrobić zobaczymy na poniższym przykładzie.

Przykład 35.
Rozpatrzmy układ równań

$$x' = x - e^x + y + 1,$$

$$y' = x^2 y + y.$$

Z drugiego równania widzimy, że dla punktu krytycznego $\mathbf{x}^*$ o składowych (x^*, y^*) jedyną możliwością jest $y^* = 0$. Zatem, z pierwszego równania, punkt krytyczny musi miec skałdowe

$$x^* = 0, y^* = 0.$$

aby zlinearyzować prawą stronę układu posłużymy się rozwinięciem w szereg Taylora, który definiuje współczynnik przy składniku liniowym x jako $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)$, a przy y jako $\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)$, gdzie f jest prawą stroną równania. Układ zlinearyzowany wygląda zatem następująco

$$x' = 0 \cdot x + 1 \cdot y,$$
$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y.$$

Macierz A ma więc postać

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❑

Uwaga. Jeśli punkt krytyczny nie jest punktem $(0, 0)$ wystaczy dokonać translacji tak, by wypadał on w środku układu. Oznacza to, że dokonujemy zamiany zmiennych $\tilde{x} = x - x^*$, $\tilde{y} = y - y^*$ (zauważmy, że $\tilde{x}' = x', \tilde{y}' = y$).

Definicja.
Punkt krytyczny układu liniowego (ogólnie układu $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$), nazywamy **punktem hiperbolicznym** *jeśli w układzie zlinearyzowanym wszystkie wartości własne mają części rzeczywiste różne od 0.*

Poniższe twierdzenie określa dla jakich punktów i dla jakich funkcji $f(\mathbf{x})$ zachodzi równoważność pomiędzy układem oryginalnym a zlinearyzowanym.

Twierdzenie 11.2.1 *(Grobman-Hartman)*
Jeśli $\mathbf{x} = 0$ *jest punktem hiperbolicznym układu*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + g(\mathbf{x}),$$

gdzie $g(\mathbf{x})$ *jest funkcją klasy* C^1 *w otoczeniu punktu* $\mathbf{x} = 0$ *taką, że*

$$g(0) = 0, \qquad \lim_{|\mathbf{x}|\to 0} \frac{|g(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0,$$

to portret fazowy układu $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ *w otoczeniu punktu punktu* $\mathbf{x} = 0$ *jest topologicznie równoważny portretowi fazowemu układu zlinearyzowanego*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

Topologiczna równoważność, wzmiankowana w powyższym twierdzeniu, oznacza, podział punktów na cztery kategorie:

- *punkty krytyczne niestabilne* (czyli węzły, w tym zdegenerowane, i ogniska niestabilne);
- *punkty krytyczne stabilne* (czyli węzły, w tym zdegenerowane, i ogniska stabilne);
- *siodła*;
- *punkty niehiperboliczne* (czyli środki).

Zatem na mocy twierdzenia Grobmana-Hartman możemy stwierdzić, czy punkt jest stabilny, czy nie, ale nie możemy rozsądzić, czy jest to np. węzeł, czy też ognisko.
Dokonać tego można przy mocniejszym założeniu na funkcję $g(\mathbf{x})$, tzn. zakładając, że

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to 0} \frac{|g(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|^{1+\varepsilon}} = 0, \qquad \text{dla pewnego } \ \varepsilon > 0.$$

Przykładowe zadania

Zadanie 98. Znajdź wszystkie punkty stacjonarne następujących układów dynamicznych:
a) $x' = x - x^3 - xy^2, \quad y' = 2y - y^5 - yx^4,$
b) $x' = x^2 + y^2 - 1, \quad y' = x^2 - y^2,$
c) $x' = e^y - x, \quad y' = e^x + y,$
d) $x' = xy^2 - x, \quad y' = x \sin \pi y.$

Zadanie 99. Zbadaj stabilność (lub niestabilość) układów
a) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}$ b) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \bar{x}$ c) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}$

Zadanie 100. Udowodnij, że rozwiązania układu

$$x' = y(e^x - 1), \quad y' = x + e^y$$

z warunkiem początkowym w I ćwiartce układu współrzędnych pozostają w tym obszarze. Co można powiedzieć o rozwiązaniach, jeśli warunek początkowy jest w innych obszarach?

Zadanie 101. Udowodnij, że rozwiązania układu

$$x' = -x - xy + x^3, \quad y' = x^2 + yx^2$$

jeśli mają punkt początkowy wewnątrz okręgu jednostkowego, to pozostają w nim dla wszystkich czasów. A co się dzieje, jeśli punkt początkowy jest na zewnątrz okręgu? (Wskazówka: oblicz $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$.)

Zadanie 102. Naszkicuj portrety fazowe następujących układów:
a) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \bar{x}$ b) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \bar{x}$
c) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}$ d) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}$

Zadanie 103. Naszkicuj portret fazowe układu:

$$x' = y, \quad y' = x + 2x^3$$

Rozdział 12

Równania różniczkowe cząstkowe

Drugim rodzajem równań różniczkowych jakie będziemy rozpatrywać, są równania różniczkowe cząstkowe. Nazwa bierze się od pochodnych cząstkowych, bowiem w tego typu równaniach występuje niewiadoma funkcja zależna nie od jednej zmiennej (jak to było w przypadku równan zwyczajnych) ale od kilku zmiennych oraz niektórych z jej pochodnych cząstkowych.

Ogólnie

Definicja 12.0.1 Równaniem różniczkowym cząstkowym *rzędu k nazywamy równanie postaci*

$$F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), Du(\mathbf{x}), D^2u(\mathbf{x}), \ldots, D^k u(\mathbf{x})) = 0, \tag{12.1}$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $D^\alpha u(\mathbf{x})$, $\alpha \in \{1, 2, \ldots, k\}$ oznacza pochodne cząstkowe α-tego rzędu funkcji u, tzn. pochodne postaci $\frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} u(\mathbf{x})$, z $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \alpha$. Dana funkcja $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \ldots \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$

Definicja 12.0.2 Rozwiązaniem równania różniczkowego *nazwiemy dowolną funkcję $u(\mathbf{x})$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ która po podstawieniu do równana* (12.1) *daje tożsamość.*

W zależności od rozpatrywanego zagadnienia Ω może być ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ bądź też całą przestrzenią $\mathbb{R}^n$.
Niestety, podobnie jak w równaniach zwyczajnych, nie istnieje metoda pozwalająca na znalezienie rozwiązania dowolnego równania.
Najczęściej musimy ograniczyć się do kilku typów równań, dla których potrafimy takie rozwiązania znaleźć.
W dalszej części przedstawimy kilka podstawowych typów równań, a także metody pozwalające wyznaczyć ich rozwiązania.

Przykład 36.
Rozpatrzmy jedno z najprostszych równan różniczkowych cząstkowych II-go rzędu

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y) = 0.$$

Zapisując je w postaci $\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)\right)\right) = 0$, i oznaczając $\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)$ przez $v(x,y)$ otrzymujemy równanie

$$v_x = 0,$$

co ma rozwiązanie postaci

$$v(x,y) = f(y)$$

gdzie f jest dowolną funkcją argumentu y. Podstawiając otrzymany wynik do definicji funkcji v otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = f(y)$$

Funkcja $u(x,y)$ spełniająca powyższe równanie musi być sumą dwóch funkcji: jednej zależnej tylko od x, drugiej zaś tylko od y (powinna to być funkcja pierwotna do funkcji f, ale z uwagi na dowolność wyboru f możemy przyjąć, że i ta funkcja jest dowolna, byle byłaby funkcja różniczkowalną). Zatem rozwiązanie ma postać

$$u(x,y) = F(x) + G(x),$$

gdzie F i G sa dowolnymi funkcjami klasy C^1 (różniczkowalnymi).

❏

Wprowadzenie do równań różniczkowych cząstkowych

Zadanie 104. Sprawdź, że $u(x,y) = f(x)g(y)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego $uu_{xy} = u_x u_y$ dla dowolnych różniczkowalnych funkcji f, g jednej zmiennej.

Zadanie 105. Sprawdź, że $u_n(x,y) = \sin nx \sinh ny$ jest rozwiązaniem równania $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dla każdego $n > 0$.

Zadanie 106. Znajdź rozwiązania ogólne $u = u(x,y)$ następujących równań: $u_x = 1, \quad u_y = 2xy, \quad u_{yy} = 6y, \quad u_{xy} = 1, \quad u_x + y = 0, \quad u_{xxyy} = 0.$

Zadanie 107. Znajdź funkcję $u = u(x,y)$ spełniającą podane równanie różniczkowe cząstkowe i warunki dodatkowe:
a) $u_{xx} = 6x; \qquad u(0,y) = y, \quad u(1,y) = y^2 + 1$
b) $yu_{yy} + u_y = 0, \qquad u(x,1) = x^2, \quad u(x,e) = 1.$

Zadanie 108. Znaleźć rozwiąznie ogólne równania $3u_y + u_{xy} = 0$ (Wsk. Podstawić $v = u_y$.). Czy istnieje jedyne rozwiązanie przy dodatkowych warunkach $u(x,0) = e^{-3x}, \quad u_y(x,0) = 0.$

Rozdział 13

Równania I rzędu - równanie transportu

Definicja 13.0.3 Równaniem transportu *nazywamy równanie różniczkowe cząstkowe postaci:*

$$a\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + b\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 0 \tag{13.1}$$

gdzie a i b są ustalonymi stałymi.

W rozdziale tym ograniczamy się do przypadku dwuwymiarowego, choć prezentowane poniżej idee i obliczenia można przenieść na przypadek n wymiarowy (wtedy równaniem transportu nazwiemy każde równanie postaci $\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a_i - dowolne stałe).

Zauważmy, że równanie (13.1) można zapisać w sposób następujący

$$a\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)+b\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = \left[\frac{\partial}{\partial x}u, \frac{\partial}{\partial y}u\right]\cdot[a,b] = \nabla u\cdot[a,b] = D_{[a,b]}u = 0, \tag{13.2}$$

gdzie $D_{[a,b]}u$ jest pochodną kierunkową funkcji $u(x,y)$ w kierunku wektora $[a,b]$. Ponieważ pochodna ta jest równa 0, równanie (13.2) implikuje, że rozwiązanie $u(x,y)$ na prostej o wektorze kierunkowym $[a,b]$ jest funkcją stałą.
Taka interpretacja powyższego równania pozwala nam na odgadnięcie postaci rozwiązania $u(x,y)$. Rozpatrzmy bowiem proste $ay-bx = C$ (czyli te o wektorze

kierunkowym $[a, b]$)). Proste te nazywamy **charakterystykami**. Z powyższych rozważań wynika, że rozwiązanie zależy tylko od tego na której prostej się znajdujemy i dane jest wzorem

$$u(x, y) = f(C) = f(ay - bx),$$

dla pewnej funkcji f.

Przykład 37.
Rozpatrzmy równanie

$$3u_x + 5u_y = 0$$

z przykładowym warunkiem początkowym

$$u(0, y) = y^3.$$

Zgodnie z teorią przedstawioną powyżej rozwiązanie powinno spełniać warunek

$$u(x, y) = f(3y - 5x).$$

Do wyznaczenia funkcji f musimy użyć warunku poczatkowego

$$u(0, y) = f(3y) = y^3,$$

z czego wynika, że $f(z) = \frac{z^3}{3^3}$. Zatem rozwiązanie dane jest wzorem

$$u(x, y) = \frac{(3y - 5x)^3}{27}.$$

❑

Jak widzimy na podstawie przedstawionego przykładu, mając zadany warunek początkowy na pewnej krzywej, która przecina wszystkie charakterystyki (każdą tylko raz), wartość rozwiązania w dowolnym punkcie leżącym na wybranej charakterystyce, jest otrzymywana z wartości warunku początkowego na tej samej charakterystyce. Mówiąc bardziej kolokwialnie rozwiązanie otrzymujemy przez "rozsmarowanie" warunku początkowego wzdłuż charakterystyk.

Osobnym problemem jest czy dla wszystkich warunków początkowych istnieje rozwiazanie równania transportu. W poniższym przykładzie zobaczymy, że nie jest tak zawsze.

Przykład 38.
Rozpatrzmy równanie

$$3u_x + 5u_y = 0$$

z warunkiem początkowym

$$u\left(x, \frac{5}{3}x - 2\right) = x.$$

Zagadnienie to nie ma rozwiązań. Wynika to z faktu, że warunek początkowy zadany został na charakterystyce. Podobnie jak w poprzednim przykładzie charakterystyki to proste postaci $y = \frac{5}{3}x + C$. Wiemy już, że rozwiązanie powinno być funkcją stałą na charakterystykach. Stoi to w sprzeczności z zadanym warunkiem początkowym, wedle którego rozwiązanie na jednej z charakterystyk zmienia się w zależności od x (czyli nie może być stałe).

❏

Poprzedni przykład sugeruje, że istnieją również takie warunki początkowe dla których istnieje nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład 39.
Rozpatrzmy równanie

$$3u_x + 5u_y = 0$$

z warunkiem początkowym

$$u\left(x, \frac{5}{3}x - 2\right) = 5.$$

Ponieważ warunek poczatkowy zadany jest na charakterystyce (i jest na niej funkcją stałą) proponowana metoda rozwiązania nie określa wartości funkcji na innych charakterystykach, poza $y = \frac{5}{3}x - 2$. Rozwiązaniem będzie więc dowolna funkcja stała na charakterystykach, a na charakterystyce $y = \frac{5}{3}x - 2$ równa 5.

❏

13.1 Niejednorodne równanie transportu

Metody zaprezentowane dla liniowego równania transportu można uogólnić dla równań postaci

$$a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = f(u) \tag{13.3}$$

nazywanego **niejednorodnym równaniem transportu**.

Ponieważ $a(x,y)$ i $b(x,y)$ nie są stałymi, a funkcjami zależnymi od (x,y) nie możemy bezpośrednio zastosować interpretacji z pochodną kierunkową. Przyjmijmy jednak, że dla ustalonego punktu (x_0, y_0), wektor $[a(x_0,y_0), b(x_0,y_0)]$ wyznacza wektor stycznym do pewnej krzywej $y = y(x)$ (dla uproszczenia załóżmy, że $f(u) \equiv 0$). Wtedy

$$\frac{d}{dx}u(x, y(x)) = u_x + y' \cdot u_y = 0,$$

co oznacza, że wzdłuż krzywej $y = y(x)$ wartość rozwiązania nie zmienia się (pochodna jest równa 0).

Wprowadźmy zatem uogólnione pojęcie charakterystyki.

Definicja 13.1.1 Charakterystykami *dla równania transportu* (13.3) *nazywamy krzywe będące rozwiązaniem równania*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}. \tag{13.4}$$

Majac tak zdefiniowane charakterystyki możemy, podobnie jak w przypadku liniowym, skonstruować rozwiązanie na podstawie warunku początkowego. Oczywiście, wszystkie zastrzeżenia dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązań są takie same jak w poprzednio rozważanym przypadku.

Przykład 40.
Rozpatrzmy zagadnienie

$$u_x + 2xyu_y = 0,$$
$$u(0,y) = y^5 - 3.$$

Charakterystyki, zadane równaniem $\frac{dy}{dx} = 2xy$, to krzywe postaci

$$y = Ce^{x^2}.$$

Rozwiązanie zatem dane jest wzorem

$$u(x, y) = f(C) = f(ye^{-x^2}).$$

Z warunku początkowego otrzymujemy postać f

$$u(0, y) = f(y) = y^5 - 3,$$

a w konsekwencji postać rozwiązania

$$u(x, y) = y^5 e^{-5x^2} - 3.$$

❑

W przypadku równania istotnie niejednorodnego (kiedy $f(u \not\equiv 0)$ idea rozwiązania jest ta sama, z tym, że poręczniej jest sparametryzować charakterystyki nie za pomocą x, a osobnym parametrem, np. s. Zakładamy więc, że charakterystyka jest dana przez $(x(s), y(s))$. Zachodzi następujace równanie

$$\frac{d}{ds} u(x(s), y(s)) = \frac{dx}{ds} u_x(x, y) + \frac{dy}{ds} u_y(x, y) = \frac{d}{ds} f(u(s)).$$

Inaczej niż w poprzednich przypadkach, rozwiązanie nie jest stałe na charakterystykach, ale zdane jest przez równanie

$$\frac{du}{ds} = f(u),$$

co razem z równaniami definiującymi charakterystyki

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y),$$

$$\frac{dy}{ds} = b(x, y),$$

tworzy układ równań z niewiadomymi funkcjami $x(s), y(s), u(s)$.
Rozwiązując je, musimy jeszcze zadbać o wyznaczenie związków pomiędzy x, y i u tak, by wyeliminować parametr s.

Przykładowe zadania

Zadanie 109. Rozwiązać równanie $2u_t + 3u_x = 0$ przy dodatkowym warunku $u = \sin x$ dla $t = 0$.

Zadanie 110. Rozwiązać równanie $(1 + x^2)u_x + u_y = 0$. Naszkicować charakterystyki.

Zadanie 111. Rozwiązać równanie $\sqrt{1 - x^2}u_x + u_y = 0$ przy warunku $u(0, y) = y$.

Zadanie 112. Rozwiązać $au_x + bu_y + cu = 0$, gdzie a, b, c są stałymi. Wsk. Szukać rozwiązania w postaci $u(x, y) = v(x, y)e^{\alpha x}$ dla specjalnie wybranego $\alpha \in \mathbb{R}$..

Zadanie 113. Rozwiązać równanie $u_x + u_y + u = 0$ przy warunku $u(x, 0) = 0$.

Zadanie 114. Znaleźć rozwiązanie ogólne $= u(x, y)$ równania $xu_x + yu_y = 0$.

Rozdział 14

Równanie struny

Równaniem struny (inaczej równaniem fali bądź równaniem falowym) nazywamy równanie postaci

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) = c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) \tag{14.1}$$

dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$.
Równanie to stosuje sie do opisu drgających strun, membran (w przypadku dwuwymiarowym), bądź opisu profilu fali w długich wąskich kanałach.

W przypadku jednowymiarowym równanie (14.1) sprowadza sie do równania

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \tag{14.2}$$

opisującym ruch drgajacej struny ($x \in \mathbb{R}$ oznacza punkt na drgającej strunie a t - czas).

Równanie struny uzupelniamy warunkami początkowymi

$$u(x, 0) = \phi(x), \tag{14.3}$$

gdzie ϕ jest interpretowane jako położenie początkowe (wychylenie początkowe) struny. Drugi warunek to

$$u_t(x, 0) = \psi(x). \tag{14.4}$$

Funkcję ψ interpretuje się jako początkowe przyłożenie siły.

Definicja 14.0.2 Zagadnieniem Cauchy'ego *dla równania fali nazywamy równanie* (14.1) *z warunkami poczatkowymi* (14.3)-(14.4).

W zależności od badanego problemu równanie struny można rozpatrywać bądź na obszarze ograniczonym, bądź na całej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

14.1 Równanie struny na całej prostej

Rozpatrując równanie struny na całej prostej mamy do dyspozycji dwie metody. Pierwsza z nich - analityczna - polega na rozdzieleniu operacji różniczkowania (w przypadku tego równania - obliczania drugich pochodnych) na dwa etapy, tak, by każdy z nich był równaniem transportu, które potrafimy rozwiązać.
Druga metoda jest przykładem pomysłu stosowanego dość szeroko w równaniach różniczkowych cząstkowych. Dokonujemy takiej zamiany zmiennnych (osobną kwestią jest jak wpaść na taką zamianę), by w nowych zmiennych równanie struny dało się zapisać jako prostsze do rozwiązania równanie. Tak zmodyfikowane równanie rozwiązujemy, by nastepnie powrócić do oryginalnego zagadnienia.

14.1.1 I metoda

Zapiszmy równanie (14.2) w nastepujący sposób

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t). \tag{14.5}$$

Oznaczając $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)$ przez $v(x,t)$, równanie (14.5) sprowadza się do równania

$$v_t - cv_x = 0.$$

Ponieważ powyższe równanie to równanie transportu więc możemy wyznaczyć rozwiązanie:

$$v(x,t) = h(x+ct),$$

dla pewnej funkcji h. Zgodnie z definicją v rozwiązanie $u(x,t)$ spełnia równanie

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = h(x+ct).$$

Zauważmy, że jeśli H jest funkcją pierwotna dla funkcji h, to funkcja $\frac{1}{2c}H(x+ct)$ jest rozwiązaniem powyższego równania. Ponieważ rozwiązaniem równania transportu $u_t + cu_x = 0$ jest dowolna funkcja $G(x-ct)$ zatem rozwiązaniem równania fali na całej prostej będzie suma tych dwóch rozwiązań

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

gdzie f i g sa dowolnymi funkcjami klasy C^2.

14.1.2 II metoda

Zainspirowani postacią rozwiązania otrzymaną poprzednia metodą, wprowadźmy nowe zmienne

$$z = x + ct, \qquad y = x - ct,$$

które pozwolą nam uprościć równanie struny do równania, którego rozwiazanie możemy łatwo obliczyć. Funkcja $\overline{u}$ będzie tą sama funkcją u ale zapisaną w zmiennych z i y. Zatem

$$u(x,t) = \overline{u}(z,y).$$

Obliczmy kolejne pochodne cząstkowe:

$$u_x = \overline{u}_z + \overline{u}_y,$$

$$u_{xx} = (\overline{u}_z + \overline{u}_y)_x = \overline{u}_{zz} + \overline{u}_{zy} + \overline{u}_{yz} + \overline{u}_{yy},$$
$$u_t = \overline{u}_z c + \overline{u}_y(-c),$$
$$u_{tt} = c^2(\overline{u}_{zz} - 2\overline{u}_{zy} + \overline{u}_{yy}).$$

Ponieważ funkcja $u(x,t)$ spełnia równanie struny, funkcja $\overline{u}(y,z)$ spełnia nastepujące równanie

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2(\overline{u}_{zz} - 2\overline{u}_{zy} + \overline{u}_{yy}) - c^2(\overline{u}_{zz} + 2\overline{u}_{zy} + \overline{u}_{yy}) = -4c^2\overline{u}_{zy} = 0,$$

tak więc, analogicznie jak w przykładzie z rozdziału 12 rozwiązanie $\overline{u}(y,z)$ ma postać

$$\overline{u}(z,y) = f(z) + g(y),$$

co jest równoważne

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct). \tag{14.6}$$

Oczywiście postać rozwiązaniania uzyskanego za pomocą pierwszej i drugiej metody jest taka sama.

14.2 Zagadnienie początkowe

Jak już widzieliśmy to na przykładzie równania transportu, do wyznaczenia konkretnych funkcji f i g potrzebne są dodatkowe warunki. Tradycyjnie, dla równania struny są to

$$u(x,0) = \phi(x),$$
$$u_t(x,0) = \psi(x),$$

co, uwzględniając postać rozwiązania (14.6), daje następujące związki pomiędzy f, g, ϕ i ψ:

$$f(x) + g(x) = \phi(x), \tag{14.7}$$
$$cf'(x) - cg'(x) = \psi(x).$$

Różniczkując pierwsze równanie, dzieląc drugie przez c i dodając oba równania stronami otrzymujemy związek między pochodnymi rozpatrywanych funkcji:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\phi'(x) + \frac{1}{c}\psi(x)),$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(\phi'(x) - \frac{1}{c}\psi(x)),$$

co, po odcałkowaniu, daje następujace wzory na wartość f i g:

$$f(s) = f(0) + \frac{1}{2}(\phi(s) - \phi(0)) + \frac{1}{2c}\int_0^s \psi(y)dy,$$

$$g(s) = g(0) + \frac{1}{2}(\phi(s) - \phi(0)) - \frac{1}{2c}\int_0^s \psi(y)dy.$$

Zauważmy jednak, że podstawiając tak uzyskane wzory do równania (14.7) otrzymujemy

$$\phi(s) = f(s) + g(s) = f(0) + g(0) - \phi(0) + \phi(s),$$

z czego wynika, że $f(0) + g(0) - \phi(0) = 0$.
Mamy więc

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) =$$
$$f(0) + \frac{1}{2}(\phi(x+ct) - \phi(0)) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(y)dy +$$
$$+g(0) + \frac{1}{2}(\phi(x-ct) - \phi(0)) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \psi(y)dy.$$

Co, po wykorzystaniu informacji o związku pomiędzy $f(0)$, $g(0)$ i $\phi(0)$, daje następujący wzór na rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania struny:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy. \tag{14.8}$$

Powyższy wzór nazywany jest **wzorem d'Alemberta**.

PRZYKŁAD 41.
Rozpatrzmy zagadnienie

$$u_{tt} = u_{xx}, ,$$
$$u(x,0) = 0,$$
$$u_t(x,0) = \mathbf{I}_{[-1,1]},$$

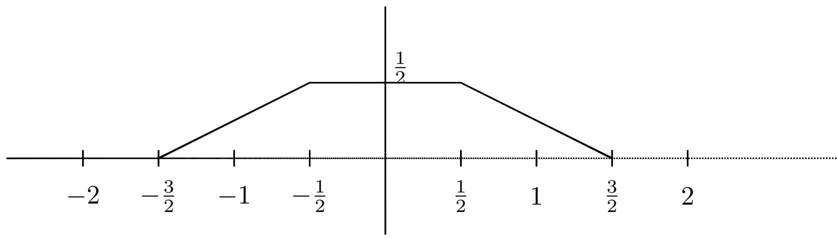
gdzie funkcja $\mathbf{I}_{[-1,1]}$ jest funkcja charakterystyczną odcinka $[-1,1]$. Fizycznie, takie warunki początkowe interpretowane są w ten sposób, że w chwili $t = 0$ struna spoczywa swobodnie, a odcinek $[-1,1]$ poddawany jest jednakowej sile (np. uderzamy młoteczkiem o szerokości rozpatrywanego odcinka).

Zgodnie ze wzorem d'Alemberta ((14.8)) rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia wygląda następująco:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \mathbf{I}_{[-1,1]}(y)dy.$$

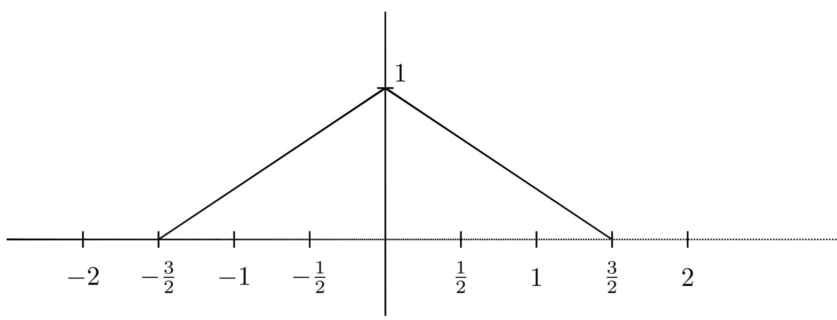
Z takiej postaci rozwiązania łatwo wyliczyć kiedy punkt o współrzędnej x_0 zacznie drgać. Wartość funkcji u będzie różna od początkowej wartości (równej w tym przykładzie 0), jeśli odcinek (x_0-t, x_0+t) będzie miał niepusty przekrój z odcinkiem $[-1,1]$. Warunek ten jest spełniony dla dodatnich x_0 gdy, $x_0-t < 1$, czyli dla czasów większych niż $x_0 - 1$. Analogicznie dla x_0 ujemnych, wartość u będzie niezerowa, gdy $t > -x_0 - 1$, co pozwala nam zapisać ogólnie ten warunek dla wszystkich x_0 jako $t > |x_0| - 1$.
Równocześnie z postaci rozwiązania możemy wnioskować, że maksymalne wychylenie struny (maksymalna wartość funkcji u) nie może być większe niż połowa z 2 (co jest równe połowie z pola pod wykresem funkcji $\mathbf{I}_{[-1,1]}$).
Poniżej zamieszczono kilka wykresów funkcji $u(x,t)$ dla różnych czasów.

Wykres dla $t = \frac{1}{2}$



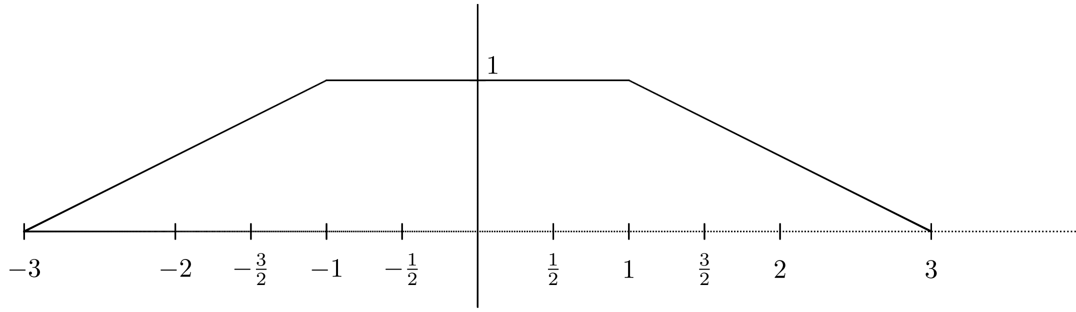
Zauważmy, że wartość funkcji u nie osiągnęła jeszcze swojego maksimum. Po raz pierwszy stanie sie to dla $t = 1$ (rysunek poniżej). Rozwiązanie po raz pierwszy osiąga swoją maksymalną amplitudę, ale za to tylko w jednym punkcie.

Wykres dla $t = 1$



Jak można zauważyć na wykresie dla $t = 2$, wraz ze wzrostem czasu, przedział x dla których rozwiązanie przyjmuje wartość równą 2, jest coraz większy.

Wykres dla $t = 2$



❏

14.3 Równanie struny na odcinku - metoda szeregów Fouriera

Oczywiście wzoru d'Alemberta nie da się bezpośrednio zastosować do równania struny na odcinku, albowiem wyrażenia $\psi(x \pm ct), \phi(x \pm ct)$ nie są określone dla dużych wartości t. Aby skorzystać z koncepcji zaprezentowanych powyżej, musimy zmodyfikować wspomniany wzór, stosując tzw. metodę odbić ([1]).
Poniżej zaprezentujemy jednak inną metodę szukania rozwiązań, czyli tzw. *metodę szeregów Fouriera*.
Zanim, na przykładzie równania struny, zapoznamy sie z nią bliżej, przypomnijmy użyteczne definicje:

Definicja 14.3.1 *Funkcję f i liczbę λ nazywamy (odpowiednio)* **funkcją własną** *i* **wartością własną** *dla drugiej pochodnej jeśli f i λ spełniają następująca równość*

$$f''(x) = \lambda f(x)$$

z warunkami brzegowymi

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Powróćmy do rozpatrywanego zagadnienia falowego na odcinku $[0,1]$ (odcinek może byc dowolny, zaś taki wybór powodowany jest tylko łatwiejszymi obliczeniami), czyli zagadnienia postaci

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u(x,0) = \psi(x),$$

$$u_t(x,0) = \phi(x).$$

Ponieważ rozpatrujemy zagadnienie na ograniczonym odcinku, powyższe warunki początkowe uzupełniamy warunkami brzegowymi:

$$u(0,t) = 0 = u(1,t),$$

opisującymi zachowanie rozwiązania na brzegu. Zaprezentowane powyżej warunki oznaczają, że struna jest przymocowana sztywno na swoich końcach.

Pierwszym krokiem w metodzie Fouriera jest przyjęcie założenia, że rozwiązanie $u(x,t)$ jest rozwiązaniem o rozdzielonych zmiennych, tzn. funkcję $u(x,t)$ możemy zapisać jako:

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

gdzie $X(x)$ i $T(t)$ są nieznanymi funkcjami jednego argumentu.
Podstawiając rozwiązanie takiej postaci do równania struny, otrzymujemy następującą równość

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t),$$

która, po przekształceniu, zapisujemy jako

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda(const).$$

Oba ilorazy muszą być wielkością stałą, gdyż $\frac{X''(x)}{X(x)}$ zależy tylko od x, a $\frac{T''(t)}{T(t)}$ tylko od t. Możemy więc powyższą równośc zapisać jako:

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0, \tag{14.9}$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \tag{14.10}$$

Zauważmy, że rozpatrując równanie (14.10), z uwagi na warunki brzegowe dla funkcji u, musimy je również uzpełnić warunkami brzegowymi. Istotnie $u(0,t) =$

$X(0)T(t) = 0 = X(1)T(t)$ implikuje, że $X(0) = 0 = X(1)$ (przypadek $T(t) = 0$ jest nieciekawy).
Sprowadziliśmy zatem nasz problem do nastepującego zagadnienia:

$$X''(x) = \lambda X(x),$$

$$X(0) = 0 = X(1),$$

które w istocie jest pytaniem o wartości i funkcje własne dla drugiej pochodnej.
Rozpatrzmy trzy przypadki (w zależności od znaku λ)

- $\lambda > 0$

  W tym przypadku rozwiązanie $X(x)$ zależy od λ i dane jest następującym wzorem
  $$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$
  Warunki brzegowe wymuszają zaś spełnianie następujących równości:
  $$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2,$$
  $$X(1) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}} - C_1 e^{-\sqrt{\lambda}} = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}}(e^{2\sqrt{\lambda}} - 1) = 0.$$
  Oczywiście ostatni warunek może być spełniony tylko dla $C_1 = C_2 = 0$, zatem nie istnieją funkcje i wartości własne gdy $\lambda > 0$.

- $\lambda = 0$

  Rozwiązanie dane jest wzorem
  $$X(x) = C_1 x + C_2,$$
  a warunki brzegowe wyglądają następująco:
  $$X(0) = C_2 = 0$$
  $$X(1) = C_1 = 0$$
  co, podobnie jak w poprzednim przypadku wyklucza przypadek $\lambda = 0$ z naszych rozważań.

- $\lambda < 0$

  W tym przypadku rozwiązanie wygląda nastepująco:

  $$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x).$$

  Z pierwszego warunku brzegowego

  $$X(0) = C_1 = 0$$

  wnioskujemy, że rozwiązanie składa sie tylko z sinusów. Zatem drugi warunek brzegowy

  $$X(1) = C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}) = 0$$

  ma niezerowe rozwiązania, o ile

  $$\sqrt{|\lambda|} = k\pi, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

  Ponieważ takich wartości λ jest nieskończenie wiele, ponumerujmy je (w zależności od k). Tak więc dla wartości własnej

  $$\lambda_k = -k^2\pi^2$$

  istnieje funkcja własna

  $$X_k(x) = \sin(k\pi x).$$

Powróćmy do poszukiwań rozwiązania struny na odcinku. Ponieważ $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$, zatem rozwiązania zagadnienia własnego dla funkcji $T(t)$ możemy uwzględnić tylko dla $\lambda = \lambda_k$ (mimo, że nie mamy analogicznych warunków do warunków brzegowych dla $X(x)$).
Oznaczmy przez $T_k(t)$ funkcję własną dla $\lambda = \lambda_k$. Mamy więc następujące rozwiązania funkcji zależnej tylko od czasu

$$T_k(t) = a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t), \qquad k \geqslant 1.$$

Oznaczmy przez $u_k(x,t)$ iloczyn funkcji X_k i T_k. Dla każdego naturalnego $k \geqslant 1$ funkcja

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$$

spełnia równanie struny oraz warunki brzegowe (niezależnie od wartości $T_k(0)$). Niestety, warunek początkowy dla funkcji $u(x,t)$

$$u(x,0) = X(x)T(0) = \phi(x)$$

zwykle nie jest spełniony.
Zauważmy jednak, że mamy nieskończenie wiele rozwiązań u_k. Biorąc ich kombinację liniową równanie struny nadal będzie spełnione, podobnie jak warunek brzegowy.

Pojawia sie więc pytanie: kiedy funkcja

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)(a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t))$$

spełniać będzie warunki początkowe?
Zanotujmy, że dla rozwiązania takiej postaci warunki początkowe wyglądają następująco:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)(a_k \cos(k\pi 0) + b_k \sin(k\pi 0)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x),$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)(a_k(-k\pi)\sin(k\pi 0)+b_k(k\pi)\cos(k\pi 0)) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(k\pi)\sin(k\pi x).$$

Pytamy zatem, kiedy funkcje $\phi(x)$ i $\psi(x)$ dadzą się rozwinąć w szereg sinusów na odcinku $[-1,1]$?

Odpowiedź przynoszą nam tzw. szeregi Fouriera.

Przypomnijmy poniżej podstawowe fakty z tej teorii.

Definicja 14.3.2 *Niech f będzie funkcją kawałkami ciągłą na odcinku $[-l,l]$.* **Szeregiem Fouriera** *funkcji f nazywamy następujący szereg*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right),$$

gdzie współczynniki a_k, b_k dane są wzorami

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right)\, dx.$$

Użyteczne będą poniższe fakty:

- Niech funkcja $f(x)$ będzie kawałkami ciągła na $[-l, l]$. Szereg Fouriera tej funkcji zbiega do:

  a) $f(x_0)$, jeśli f jest ciągła w x_0;

  b) $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$, jeśli f jest nieciągła w x_0, a $f(x_0^\pm)$ oznacza $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$.

- Jeśli funkcja f jest funkcją parzystą, to w jej szeregu Fouriera występują tylko cosinusy.

- Jeśli funkcja f jest funkcją nieparzystą, to w jej szeregu Fouriera występują tylko sinusy.

Ponieważ nasze zagadnienie jest określone na odcinku $[0, 1]$, a powyższa teoria jest określona dla odcinka $[-1, 1]$, aby uzyskać współczynniki a_k, b_k w rozwinięciu w szereg sinusów, powinniśmy przedłużyć funkcje ϕ i ψ do funkcji $\tilde{\phi}$ i $\tilde{\psi}$, określonych na odcinku $[-1, 1]$.
Z wielu możliwości przedłużenia tych funkcji wybieramy przedłużenie do funkcji nieparzystej, co jest nam potrzebne by rozwinięcie w szereg funkcji $\tilde{\phi}$ i $\tilde{\psi}$ zawierało tylko sinusy.

Przykładowe zadania

Zadanie 115. Rozwiąż zagadnienie: $u_{tt} = c^2 u_{xx}, u(x, 0) = e^x, u_t(x, 0) = \sin x$.

Zadanie 116. Rozwiąż zagadnienie: $u_{tt} = c^2 u_{xx},\ u(x, 0) = \log(1+x^2),\ u_t(x, 0) = 4 + x$.

Zadanie 117. Młoteczek o średnicy $2a$ uderzył w środek struny fortepianowej o napięciu T, gęstości ρ i długości ℓ. Pchła siedzi na tej strunie w odległości $\ell/4$ od jednego z końców. (Zakładamy, że $a < \ell/4$; w przeciwnym wypadku – biedna pchła!). Ile czasu minie od momentu uderzenia, do momentu gdy pchła odczuje pierwsze drgania?

Zadanie 118. Załóżmy, że φ i ψ są funkcjami nieparzystymi względem x. Udowodnij, że rozwiązanie równania falowego $u(x, t)$ z tymi warunkami początkowymi jest też funkcją nieparzystą względem x dla każdego t.

Zadanie 119. Rozwiąż zagadnienie

$$u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = e^x.$$

(Wsk. Zapisz operator po lewej stronie równania w postaci (...)(...), podobnie jak to było zrobione na wykładzie).

Zadanie 120. Rozwiąż zagadnienie

$$u_{xx} + u_{xt} - 20u_{tt} = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Zadanie 121. Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne z warunkami brzegowymi:
$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0, \quad u(0) = 0,\ u(L) = 0.$
Oczywiście funkcja $u(x) \equiv 0$ jest rozwiązaniem tego zagadnienia. Czy jest to jedyne rozwiązanie? Czy odpowiedź zależy od L?

Zadanie 122. Dla jakich wartości λ zagadnienie $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$ ma nietrywialne rozwiązanie?

Zadanie 123. Rozwiąż zagadnienie brzegowe
$u'' = 0$ dla $0 < x < 1, \quad u'(0) + ku(0) = 0, \quad u'(1) \pm ku(1) = 0$
dla każdej stałej k. Rozważaj przypadki $+$ i $-$ osobno. Dlaczego przypadek z $k = 2$ jest wyróżniony?

Zadanie 124. Wyznacz graficznie wartości własne zagadnienia
$-X'' = \lambda X, \qquad X(0) = 0, \quad X'(1) + aX(1) = 0$

dla pewnej stałej $a \neq 0$.

Zadanie 125. Znajdź wartości własne i odpowiadające im funkcje własne zagadnienia
$\frac{d^4X}{dx^4} = \lambda X, \qquad X(0) = X(1) = X''(0) = X''(1) = 0.$

Zadanie 126. Znajdź wartości własne i odpowiadające im funkcje własne zagadnienia
$\frac{d^4X}{dx^4} = \lambda X, \qquad X(0) = X'(0) = X(1) = X'(1) = 0.$

Zadanie 127. Znaleźć szereg Fouriera funkcji

$f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$ $\qquad f(x) = |x|$ na $(-\pi, \pi)$ $\qquad f(x) = |x|$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
$f(x) = x^2$ na $(0, 2\pi)$ $\qquad f(x) = e^x$ na $(0, 2\pi)$ $\qquad f(x) = e^x$ na $(-\pi, \pi)$

Zadanie 128. Skonstruuj rozwiązanie następujących zagadnień metodą rozdzielania zmiennych: a) $u_t = u_y, \quad u(0, y) = e^y + e^{-2y}$; b) $u_t = u_y + u, \quad u(0, y) = 2e^{-y} - e^{2y}$.

Zadanie 129. Rozważamy równanie falowe $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < 1$, z mieszanym warunkiem brzegowym: $u_x(0, t) = u(1, t) = 0$. Znajdź funkcje własne i wartości własne, oraz zapisz rozwiązanie w postaci szeregu.

Rozdział 15

Równanie ciepła

Równaniem ciepła (inaczej równaniem przewodnictwa cieplnego) nazywamy równanie następujące

$$u_t = \Delta u. \tag{15.1}$$

Równanie to opisuje rozchodzenie się ciepła (zmianę temperatury) w rozpatrywanym obszarze. W przypadku jednowymiarowym, kiedy równanie (15.1) sprowadza się do

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \tag{15.2}$$

wartość $u(x_0, t_0)$ interpretuje się jako wartość temperatury w chwili t_0, w punkcie x_0. Fizycznie interpretuje się to jako wartość temperatury w pręcie (o nieskończonej długości) na tyle cienkim, iż możemy przyjąć, że jest on jednowymiarowy, zaniedbując pozostałe dwa wymiary.

Równanie różniczkowe uzupełniamy warunkiem poczatkowym

$$u(x,0) = u_0(x),$$

interpretowanym jako początkowy rozkład temperatury.
W zależności, czy rozpatrujemy nasze zagadnienie na całej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ czy też na obszarze ograniczonym, warunek początkowy uzupełniamy również warunkiem brzegowym, np. w przypadku jednowymiarowym jest to zwykle

$$u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Co oznacza, że na krańcach prętu o długości 1 temperatura nigdy nie wzrośnie (czyli mamy rodzaj idealnego chłodzenia).

15.1 Równanie ciepła na odcinku jednostkowym

Podobnie jak to było w przypadku równania falowego, również i w tym przypadku, szukając rozwiązania równania ciepła posłużymy sie metodą szeregów Fouriera. Zatem, będziemy zakładali, że

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

dla pewnych, nieznanych funkcji $X(x)$ i $T(t)$. Szukane funkcje spełniają równanie

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda(const)$$

dla pewnej stałej (pewnych stałych) λ.
Zauważmy, że rozpatrując zagadnienie spełniane przez funkcję $X(x)$:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = X(1) = 0,$$

jest to to samo zagadnienie, co w przypadku jednowymiarowego równania struny (z uwagi na analogiczne warunki brzegowe). Powtarzając więc rachunki przeprowadzone w poprzednim rozdziale, otrzymamy następujące wartości własne

$$\lambda_k = -k^2\pi^2$$

i odpowiadające im funkcje własne:

$$X_k(x) = \sin(k\pi x).$$

Ponieważ funkcja $T(t)$ spełnia nieco inne, niż w poprzednim przypadku, równanie, tzn:

$$T'(t) - \lambda_k T(t) = 0,$$

odpowiadające im funkcje $T_k(t)$ będą miały inną postać:

$$T_k(t) = e^{-(k\pi)^2 t}.$$

Powtarzając rozumowanie z poprzedniego rozdziału, otrzymujemy postać rozwiązania równania ciepła na odcinku:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(k\pi)^2 t} \sin(k\pi x).$$

Podstawiając $t = 0$ otrzymamy warunek na współczynniki c_k

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x) = u_0(x).$$

Ponieważ funkcja $u_0(x)$ jest dana, przedłużając ją do funkcji nieparzystej na odcinku $[-1,1]$ i biorąc jej rozwinięcie w szereg Fouriera otrzymamy poszukiwane współczynniki.

15.2 Równanie ciepła na prostej

Szukając rozwiązania równania ciepła na całej prostej zapoznamy się z nowym typem rozwiązań - rozwiązaniem samopodobnym.

Zauważmy, że jeśli funkcja $u(x,t)$ spełnia równanie ciepła, to funkcja

$$u_\lambda(x,t) := \lambda^\alpha u(\lambda^{\frac{1}{2}} x, \lambda t)$$

również spełnia równanie, mamy bowiem:

$$(u_\lambda)_t(x,t) = \lambda^{\alpha+1} u_{\tilde{t}}(\tilde{x},\tilde{t}) = \lambda^{\alpha+2\frac{1}{2}} u_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x},\tilde{t}) = (u_\lambda)_{xx}(x,t),$$

gdzie $\tilde{x} = \lambda^{\frac{1}{2}} x$ a $\tilde{t} = \lambda t$, a α jest dowolna stałą.

Na marginesie dodajmy, że rozwiązania spełniające warunek:

$$u_\lambda(x,t) = u(x,t),$$

dla wszystkich wartości $\lambda > 0$ nazywamy **rozwiązaniami samopodobnymi** (inaczej *automrficznymi*, lub typy *self-similar*).

Rozwiązania samopodobne maja kilka interesujących własności. Jedną z nich jest fakt, że są określone dla wszystkich czasów (czyli są rozwiązaniami globalnymi). Wynika to z faktu, że podstawiając

$$\lambda = \frac{1}{t},$$

rozwiązanie przyjmuje postać

$$u(x,t) = t^{-\alpha} u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Z postaci tej wynika, że znając rozwiązanie dla pewnego czasu $t = 1$, możemy wyznaczyć rozwiązanie w dowolnej chwili t.

Zatem szukając rozwiązania równania ciepła na prostej, szukać będziemy rozwiązań samopodobnych.
Podstawmy za $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ i określmy nową funkcję $v(y)$ jako $v(y) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$.
Nowa funkcja $v(y)$ spełnia zatem równanie (podstawiamy $u(x,t) = t^{-\alpha} v(y)$):

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \frac{1}{2} t^{-(\alpha+1)} y v'(y) + t^{-(\alpha+1)} v''(y) = 0,$$

a że wyrażenie $t^{-(\alpha+1)}$ występuje w każdym ze składników, więc

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} y v'(y) + v''(y) = 0.$$

Zauważmy, że dobierając $\alpha = \frac{1}{2}$, powyższe równanie możemy zapisać jako:

$$(v' + \frac{1}{2} y v)' = 0,$$

co, po odcałkowaniu, daje następujące równanie na $v'(y)$

$$v' = -\frac{1}{2} y v$$

(założyliśmy, że stała całkowania C jest równa 0).
Stąd łatwo otrzymujemy rozwiązanie samopodobne dla równania ciepła:

$$v(y) = b e^{-\frac{y^2}{4}}$$

co, przy użyciu zmiennych x i t zapisuje się jako:

$$u(x,t) = bt^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Rozwiązanie to nazywamy **rozwiązaniem podstawowym równania ciepła**.

Analogiczny rachunek można przeprowadzic dla $n \geqslant 2$ otrzymując wzór

$$u(x,t) = bt^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Stałą b z reguły dobieramy tak by $\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx = 1$. Takie rozwiązanie

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

nazywamy **jądro Gaussa-Weierstrassa** (bądź *jądrem ciepła*).

Niestety, otrzymane rozwiązanie ma zasadniczy minus. Zauważmy, że gdy $t \to 0$, rozwiązanie $u(x,t) \to 0$, gdy $x \neq 0$ i $+\infty$ dla $x = 0$ (czyli do delty Diraca). Niemniej jednak można określić rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła. Zachodzi bowiem poniższe twierdzenie (podamy je bez dowodu):

Twierdzenie 15.2.1 *Niech $u_0(x)$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną na $\mathbb{R}^n$. Oznaczmy przez $G(x,t)$ jądro Gaussa-Weierstrassa. Wtedy splot warunku początkowego i jądra ciepła, tzn. funkcja postaci:*

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy$$

ma następujące własności;
i) dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ i $t > 0$ funkcja $u(x,t)$ spełnia równanie (15.1);
ii) dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ i $t > 0$ funkcja $u(x,t)$ jest funkcją gładką (C^∞);
iii) funkcja $u(x,t)$ może być rozszerzona do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$, tak, by $u(x,0) = u_0(x)$.

Dowód można znaleźć w większości podręczników z równań różniczkowych cząstkowych (np. [3]).

Przykładowe zadania

Zadanie 130. Rozdzielając zmienne rozwiąż równanie $tu_t = u_{xx} + 2u$ z warunkami brzegowymi $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Udowodnij, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających warunek początkowy $u(x,0) = 0$. Tak więc, w tym przypadku brak jest jednoznaczności rozwiązań!

Zadanie 131. Rozwiąż równanie dyfuzji $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, z mieszanym warunkiem brzegowym: $u(0,t) = u_x(1,t) = 0$ i warunkiem początkowym $\varphi(x)$.

Zadanie 132. Rozważamy równanie dyfuzji $u_t = u_{xx}$, $-1 < x < 1$, z okresowymi warunkami brzegowymi: $u(-1,t) = u(1,t)$ oraz $u_x(-1,t) = u_x(1,t)$. Udowodnij, że rozwiązanie ma następującą postać $u(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x\Big)e^{-n^2\pi^2 t}$.

Zadanie 133. Znajdź rozwiązanie równania $u_{xx} + u_{yy} = 0$ w prostokącie $0 < x < a$, $0 < y < b$ spełniające następujące warunki brzegowe:
$u_x = -a \quad \text{dla} \quad x = 0, \qquad u_x = 0 \quad \text{dla} \quad x = a,$
$u_y = b \quad \text{dla} \quad y = 0, \qquad u_y = 0 \quad \text{dla} \quad y = b.$
(Wsk. To zadanie można zrobić na dwa sposoby: metodą Fouriera rozdzielania zmiennych lub można szukać rozwiązania w postaci wielomianu.)

Zadanie 134. Znajdź rozwiązanie zagadnienia
$u_t = u_{xx} + u,\ x \in (0,1); \qquad u(x,0) = \cos x, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0.$

Rozdział 16

Równanie Laplace'a i Poissona

16.1 Równanie Laplace'a

Równaniem Laplace'a nazywamy równanie

$$\Delta u = 0. \tag{16.1}$$

Choć wydaje się, że równanie Laplace'a nie może mieć zbyt skomplikowanych rozwiązań, to jednak rozwiązania te odgrywają dużą rolę w analizie. Na tyle dużą, że rozwiązania te noszą osobną nazwę.

Definicja 16.1.1 Funkcją harmoniczną *nazywamy rozwiązanie równania Laplace'a*

$$\Delta u = 0.$$

Równanie Laplace'a rozpatrywane może być na różnego rodzaju obszarach. W poniższych przykładach skoncentrujemy się na obszarach będących ograniczonymi podzbiorami przestrzeni dwuwymiarowej.

Przykład 42.
Rozpatrując równanie Laplace'a na obszarze będącym kwadratem $[0,1]\times[0,1]$, równanie (16.1) uzupełniamy zerowymi warunkami brzegowymi:

$$\text{dla } \ x \in [0,1], \ \ u(x,1) = u(x,0) = 0, \qquad \text{dla } \ y \in [0,1], \ \ u(0,y) = u(1,y) = 0.$$

Do tego typu zagadnienia można zastosować poznaną już metodę szeregów Fouriera. Istotnie zakładając, że funkcja $u(x, y)$ jest iloczynem funkcji zależnych tylko od x i od y (czyli $u(x, y) = X(x)Y(y)$) równanie Laplace'a zapisać możemy jako

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda = const,$$

co sprowadza się do, znanego już, zagadnienia na funkcje własne dla drugiej pochodnej:

$$X''(x) = \lambda X(x), \qquad X(0) = 0,\ X(1) = 0, \tag{16.2}$$

$$Y''(y) = -\lambda Y(y), \qquad Y(0) = 0,\ Y(1) = 0. \tag{16.3}$$

Zauważmy jednak, że przy tak dobranych warunkach brzegowych rozwiązanie $u(x, y)$ nie może istnieć. Z rozważań dla równania ciepła, wiemy, że przy zerowych warunkach brzegowych równanie (16.2) ma rozwiązanie tylko dla $\lambda < 0$. Z drugiej strony równanie (16.3) również ma rozwiązanie tylko dla $-\lambda < 0$, czyli tylko dla $\lambda > 0$, co prowadzi do sprzeczności.

Czy zawsze rozwiązanie równania (16.1) w kwadracie jednostkowym musi być funkcją zerową? Nie, jeśli warunki brzegowe są dobrane odpowiednio. Przykładem niech będzie funkcja $u(x, y) = xy$ będąca rozwiązaniem równania Laplace'a ale z następującymi warunkami brzegowymi

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x \quad \text{dla} \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = y, \quad \text{dla} \quad y \in [0, 1].$$

❏

Kiedy jednak obszarem na którym rozpatrujemy zagadnienie nie jest kwadrat (lub prostokąt) a na przykład kołem metoda szeregów Fouriera nie zadziała. W takim przypadku rozwiązania szukać będziemy wśród rozwiązań innego typu, a mianowicie wśród rozwiązań radialnie symetrycznych.

Definicja.
Rozwiązaniem radialnie symetrycznym *nazywamy rozwiązanie które zależy tylko od odległości od środka obszaru, tzn.*

$$u(x, y) = u(r), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ponieważ będziemy szukac rozwiązań radialnie symetrycznych, pierwszym krokiem będzie zapisanie laplasjanu we współrzędnych biegunowych
Zapiszmy

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{d}{dr}\left(v'(r)\frac{x_i}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x_i} = \left(v''(r)\frac{x_i}{r} + v'(r)\frac{\frac{\partial x_i}{\partial r}r - x_i}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x_i},$$

co daje nastepujący wzór na druga pochodną wzgledem x_i

$$v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\frac{1}{r} - v'(r)\frac{x_i^2}{r^3}.$$

Laplasjan $\Delta u(x, y)$ przyjmie zatem we współrzędnych biegunowych postać następującą (dla funkcji $v(r) = u(x, y)$)

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v''(r) + v'(r)\frac{n-1}{r} = 0.$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = -(n-1)\frac{1}{r},$$

co po odcałkowaniu daje

$$\ln v'(r) = -(n-1)\ln r + C.$$

Tak więc rozwiązanie $v(r)$ wygląda następująco

$$v(r) = \begin{cases} Cr^{2-n} + D & n \geqslant 3, \\ C\ln r + D & n = 2. \end{cases}$$

Wracając do zmiennych $\mathbf{x} = (x, y)$ otrzymujemy

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{x}| + D & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\sigma_n}|\mathbf{x}|^{2-n} + D & n \geqslant 3. \end{cases} \tag{16.4}$$

gdzie σ_n jest objętością kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$.

Ponieważ rozwiązań szukamy wśród rozwiązań radialnie symetrycznych, warunek brzegowy również powinien byc radialnie symetryczny, co oznacza, że na brzegu obszaru (koła) rozwiązanie powinno przyjmować stałą wartość.
Wystarczy zatem w rozwiązaniu danym wzorem (16.4) dobrać stałą D tak, by na brzegu $\Phi(\mathbf{x})$ przyjmowało żądaną wartość.

16.2 Równanie Poissona

Równaniem Poissona nazywamy równanie

$$\Delta u = f, \tag{16.5}$$

gdzie f jest daną funkcją
Rozwiązaniem równania Poissona jest funkcja

$$u(\mathbf{x}) = (\Phi * f)\ (\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

gdzie $\Phi(z)$ jest rozwiązaniem podstawowym zadanym wzorem

$$\Phi(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |z| & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\sigma_n} |z|^{2-n} & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Dowód powyższego faktu, oraz dalsze własności rozwiązania równania Poissona, znaleźć można np. w [3].

Bibliografia

[1] P. Biler, G. Karch, T. Nadzieja, D. Wrzosek, *Warsztaty z Rówanań Różniczkowych Cząstkowych*, Centrum Badań Nieliniowych im. J. Schaudera, UMK, Toruń 2003.

[2] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications, An Introduction to Applied Mathematics*, Springer, New York, 1983.

[3] L. C. Evans, *Równania różniczkowe cząstkowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

[4] N. M. Matwiejew, *Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1970.

[5] N. M. Matwieejew, *Zbiór zadań z równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1974.

[6] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.